

異方性板の自由振動解析

長崎大学 大学院 ○学生員 萩野 毅

長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅

長崎大学 工学部 正 員 松田 浩

長崎大学 工学部 正 員 森田千尋

1. まえがき

本研究は、数値的に求められたGreen関数に基づき、任意の境界条件、異方性を有する異方性板の自由振動解析を行うものである。離散化Green関数は、著者らの一部が既に提示した基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により得られる離散的な一般解法¹⁾を異方性板に応用し求められる。

2. 基礎理論

Fig.1 に示すような異方性板の主軸(L)方向と主軸に垂直な(T)方向における応力とひずみの関係(フックの法則)は以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{TZ} \\ \tau_{LZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{TZ} \\ \gamma_{LZ} \end{Bmatrix}$$

Q_{ij} : 剛性係数($i, j=1, 2, 6$)、 $\therefore$ せん断剛性係数($i, j=4, 5$)

$$Q_{11} = E_L/\mu, \quad Q_{12} = \nu_{LT}E_T/\mu, \quad Q_{22} = E_T/\mu, \quad Q_{66} = G_{LT},$$

$$Q_{44} = G_{TL}, \quad Q_{55} = G_{LT}, \quad \mu = (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$$

これを主軸(L)と任意の角度 θ をもつxy座標系に変換し、

$l = \cos\theta$, $m = \sin\theta$ とすると以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

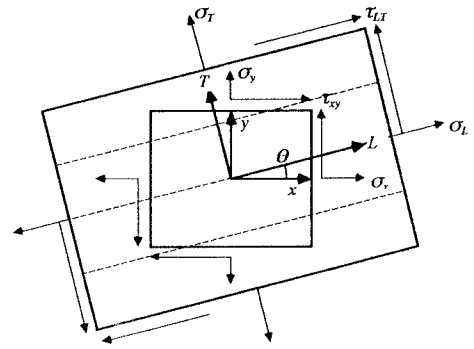


Fig.1 異方性板

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}l^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}m^4, \quad \bar{Q}_{16} = (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})lm^3 - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})l^3m, \quad \bar{Q}_{44} = Q_{44}l^2 + Q_{55}m^2, \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})l^2m^2 + Q_{22}l^4, \quad \bar{Q}_{26} = (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})l^3m - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})lm^3, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})lm, \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(l^4 + m^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})l^2m^2, \quad \bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})l^2m^2 + Q_{66}(l^4 + m^4), \quad \bar{Q}_{55} = Q_{44}m^2 + Q_{55}l^2 \end{aligned}$$

3. 運動方程式の境界積分方程式への変換

異方性板の振動に関する運動方程式を示す。

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = -\rho h \omega^2 w \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} = \bar{Q}_x \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} = \bar{Q}_y \quad (1-3)$$

$$D_{11} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_x \quad (1-4)$$

$$D_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_y \quad (1-5)$$

$$D_{16} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_{xy} \quad (1-6)$$

$$\kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) = \bar{Q}_y \quad (1-7)$$

$$\kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) = \bar{Q}_x \quad (1-8)$$

異方性板の基本解に対する基礎微分方程式を示す。

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = -\rho \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} = \bar{Q}_x \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} = \bar{Q}_y \quad (2-3)$$

$$D_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_y \quad (2-5)$$

$$D_{16} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_{xy} \quad (2-6)$$

$$\kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) = \bar{Q}_y \quad (2-7)$$

$$D_{11} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) = \bar{M}_x \quad (2-4) \quad \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) = \bar{Q}_x \quad (2-8)$$

ここに、 ρh : 単位面積の質量、 ω : 固有円振動数、 $\kappa = 6/5$: せん断修正係数、

P : 単位集中荷重、 (x_0, y_0) : P の作用点、 $\delta(x - x_0), \delta(y - y_0)$: Diracのデルタ関数(衝撃関数)、

$$D_{ij} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{Q_{ij}}{E_T} \right) \quad (i,j=1,2,6), \quad A_{ij} = a^2 h \left(\frac{Q_{ij}}{E_T} \right) \quad (i,j=4,5)$$

式(1-1)を基に、式(2-1~8)を用いて整理し、境界条件を考慮のうえ次の無次元量および諸量

$$\lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0} \quad (D_0 = E_T h_0^3 / \mu), \quad \eta = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{b}, \quad \text{および} \quad F(\eta, \zeta) = \frac{b}{a} \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

を導入すると、いずれの境界条件の場合も、

$$w(\eta_0, \zeta_0) = \int_0^1 \int_0^1 F(\eta, \zeta) \lambda^4 w(\eta, \zeta) \bar{w}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (3)$$

となる。なお $\bar{w}$ は単位荷重が $\delta(\eta_0, \zeta_0)$ に作用した場合の全体における異方性板のたわみ、すなわちGreen関数を表す。

4. 異方性板の基礎微分方程式およびその離散解

Green関数は異方性板の基礎微分方程式(2-1~8)の離散的一般解により求めることができる。まず基礎微分方程式を面積分し積分方程式に変換する。次に等間隔の数値積分法の応用により、その積分方程式を離散表示すれば無次元化された断面力および変形の主要点 X_{pij} に関する連立方程式が得られる。一方、任意の主要点における諸量 X_{pij} は境界従属点における諸量で表されることになり、

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left\{ \sum_{r=0}^i a_{pijd} X_{r0} + \sum_{g=0}^j b_{pijd} X_{s0g} \right\} + q_{pij} \quad (4)$$

となる。これによって X_{pij} の離散化Green関数が求まり、この結果をたわみ $\bar{w}$ とする。なお式(4)の導入過程については、文献1)を参照されたい。

5. 数値解析結果

数値解析において、 $D_1 = E_L h^3 / 12\mu$ 、 $D_2 = E_T h^3 / 12\mu$ 、 $D_3 = D_1 + 2D_2$ 、 $D_4 = E_L \nu_{LT} h^3 / 12\mu$ 、 $D_5 = G_{LT} h^3 / 12$ なる関係式を定義し、 D_1/D_2 、 D_3/D_2 が異方性を表すものとし、異方性を変化させた四辺単純支持直交異方性板(Fig.2)と配向角(θ)を変化させた四辺固定異方性板(Fig.3)について他解析法による解析結果との比較を示す。なお、比較解について直交異方性板はHearmon²⁾、異方性板はFarsa³⁾の解析結果によるものである。また、振動数 λ^2 は $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ である。

[参考文献]

- 1) 崎山毅, 松田浩 : 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp21-28, 1983
- 2) Hearmon, R.F.S. : The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plate with Clamped or Supported Edges. J. Appl. Mech., Vol. 26, No. 3-4, pp537-540, Dec. 1959
- 3) J. Farsa, A.R.K., C.W.B. : Fundamental Frequency Analysis of Single Specially Orthotropic, Generally Orthotropic and Anisotropic Rectangular Layered Plates by The Differential Quadrature Method, Computers & Structures, Vol. 46, No. 3, pp. 465-477, 1993

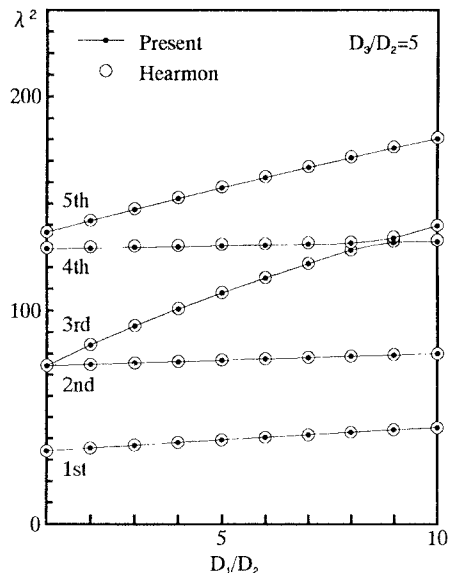


Fig.2 弾性係数比(D_1/D_2)の変化に対する固有振動数の変化(四辺単純支持)

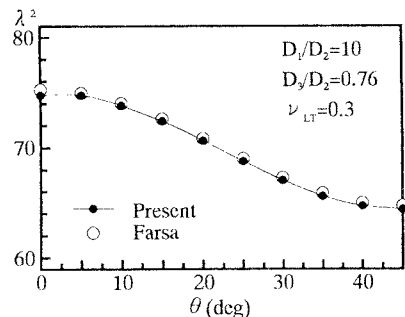


Fig.3 配向角と基本振動数(四辺固定)