

クロスプライ積層偏平殻の自由振動解析

九州大学工学部 正員 〇若菜啓孝
 長崎大学工学部 正員 崎山毅
 長崎大学工学部 正員 松田浩
 長崎大学工学部 正員 森田千尋

1. まえがき

本研究では、横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した一次せん断変形理論に基づき、相対する2辺が単純支持されたクロスプライ積層偏平殻の自由振動問題を解析する手法について述べたものである。この解析法では、まず一軸方向にはりの固有関数を仮定し、連立偏微分方程式で表された積層板に関する基礎微分方程式を連立常微分方程式へと転化する。次に、この連立常微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により得られる解析的近似解を求める。得られた係数行列式は振動数パラメータを含んだ振動方程式となり、これから試行錯誤法によって固有値解析を行う。

2. 基礎微分方程式

材料は均質な直交異方性材料とする。 N 層のラミナで構成された積層板のせん断力を Q_x, Q_y 、ねじりモーメント M_{xy} 、曲げモーメントを M_x, M_y 、各座標軸方向の変位を u, v, w 、たわみ角を θ_x, θ_y とすれば、積層偏平殻の自由振動に関する支配方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \kappa_x Q_x &= P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1-a) & N_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + B_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad \dots (1-h) \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \kappa_y Q_y &= P \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1-b) & N_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + B_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad \dots (1-i) \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \kappa_x N_x + \kappa_y N_y &= P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1-c) & N_{xy} &= A_{66}\varepsilon_{xy} + B_{66}\varepsilon_{xz} \quad \dots\dots\dots (1-j) \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1-d) & M_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + D_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad \dots (1-k) \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= I \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1-e) & M_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \quad \dots (1-l) \\ Q_y &= \kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad \dots\dots\dots (1-f) & M_{xy} &= B_{66}\varepsilon_{xy} + D_{66}\varepsilon_{xz} \quad \dots\dots\dots (1-m) \\ Q_x &= \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad \dots\dots\dots (1-g) & P &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho^{(k)} dz \quad \dots\dots\dots (1-n) \\ & & I &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho^{(k)} dz \quad \dots\dots\dots (1-o) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa_x w, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \kappa_y w, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}$$

ただし、 A_{ij}, B_{ij} および D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は伸び剛性、曲げ-伸びカップリング剛性、曲げ剛性であり、各ラミナの弾性定数を C_{ij} 、せん断修正係数を κ_{ij} とすれば

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{ij}^{(k)} C_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j = 4, 5)$$

y 方向にのみ級数展開することを考慮すると、積層板の自由振動を支配する基礎微分方程式は $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ 、および $N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_y$ を独立変数とする式で与えられ、単純支持であることを考慮して、たわみおよび断面力を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} N_{xy} &= \sum_m N_{xy}(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t}, & N_x &= \sum_m N_x(x) \cos \alpha_m y e^{i\omega_m t}, & Q_x &= \sum_m Q_x(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t} \\ M_x &= \sum_m M_x(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t}, & M_{xy} &= \sum_m M_{xy}(x) \cos \alpha_m y e^{i\omega_m t}, & u &= \sum_m u(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t} \end{aligned}$$

$$v = \sum_m v(x) \cos \alpha_m y e^{i\omega_m t}, \quad w = \sum_m w(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t}, \quad \theta_x = \sum_m \theta_x(x) \cos \alpha_m y e^{i\omega_m t}$$

$$\theta_y = \sum_m \theta_y(x) \sin \alpha_m y e^{i\omega_m t}, \quad \alpha_m = m\pi/a (m = 1, 2, \dots, n)$$

独立変数に関する基礎微分方程式を無次元量 X_t および無次元座標 η を導入して表すと、

$$\frac{dX_t}{d\eta} = \lambda \sum_{k=1}^{11} G_{tk} X_k \quad (t = 1 \sim 10, X_{11} = 1) (\lambda = y/a, G_{tk}: \text{断面力および変位の係数}) \dots\dots\dots (2)$$

$$(X_1, X_2, X_3) = (a^2 Q_x, a M_{xy}, a M_x) / D_0 (1 - \nu^2), \quad X_4 = \theta_y, \quad X_5 = \theta_x, \quad X_6 = w/a$$

$$X_7 = a^2 N_{xy} / D_0 (1 - \nu^2), \quad X_8 = a^2 N_x / D_0 (1 - \nu^2), \quad X_9 = v/a, \quad X_{10} = u/a, \quad D_0 = E_2 h^3 / 12, \quad \eta = y/a$$

座標原点を左端境界線にとり、変域 $[0, \eta]$ で積分を行った積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することより、任意の線要素 i における解析的近似解は次のように求められる。

$$X_{pi} = \sum_{d=1}^{10} \left(\sum_{t=1}^{10} A_{pt} a_{t0d} + \sum_{t=1}^{10} \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} B_{pt} a_{tkd} \right) X_{d0}, \quad a_{d0d} = 1.0 (d = 1 \sim 10) \dots\dots\dots (3)$$

β_{ik} は数値積分法による重み係数である。諸量 X_{d0} はいわゆる積分定数であり、具体的には断面力および変形量を表し、10個存在するが、積層板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は既知となり残りの未知なる積分定数は、対辺の境界条件によって決定される。

3. 数値計算

クロスプライ積層偏平殻の振動特性に与える積層数、曲率、境界条件などの影響について解析する。数値計算で用いた各ラミナの材料定数は以下のとおりである。

$$E_1/E_2 = 25, G_{23}/E_2 = 0.2, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25 \quad \text{、せん断修正係数: } \kappa_{ij}^2 = 5/6$$

表1. 振動数パラメータの精度の比較 (4辺単純支持、 κ_x, κ_y : 曲率)

Clindrical Shells								
	κ_y	10(分割数)	30	50	80	100	Librescu	Reddy
0/90	0.0	9.21206	8.90153	8.90274	8.89656	8.89413	8.900	8.8998
	0.05	8.90474	8.89241	8.89184	8.89128	8.89344	8.894	8.8900
	0.20	9.15709	8.93174	8.93230	8.93197	8.93232	8.931	8.9082
0/90/0	0.0	12.16201	12.16285	12.16286	12.16286	12.16286	12.163	12.162
	0.05	12.16525	12.16595	12.16596	12.16596	12.16596	12.166	12.166
	0.20	12.21149	12.21210	12.21212	12.21211	12.21212	12.212	12.207
0/90/90/0	0.0	12.13077	12.22719	12.22723	12.22720	12.22722	12.227	12.226
	0.05	12.19606	12.23011	12.23015	12.23016	12.23017	12.230	12.230
	0.20	12.28895	12.27355	12.27358	12.27362	12.27359	12.274	12.267
Spherical Shells								
	κ_x, κ_y	10(分割数)	30	50	80	100	Librescu	Reddy
0/90	0.05	8.11677	8.92381	8.92211	8.92065	8.92329	8.922	8.9212
	0.10	9.33833	8.98688	8.98787	8.98423	8.98953	8.989	8.9841
	0.20	9.67680	9.24608	9.24537	9.24846	9.24740	9.247	9.2309
0/90/0	0.05	12.17686	12.17755	12.17755	12.17756	12.17756	12.178	12.176
	0.10	12.22079	12.22144	12.22146	12.22146	12.22145	12.221	12.215
	0.20	12.39410	12.39437	12.39438	12.39439	12.39438	12.394	12.372
0/90/90/0	0.05	12.25606	12.24191	12.24192	12.24190	12.24195	12.242	12.240
	0.10	12.19983	12.28582	12.28580	12.28579	12.28583	12.286	12.280
	0.20	12.30093	12.45875	12.45877	12.45880	12.45880	12.459	12.437

4. 結論

積層偏平殻の自由振動に関する一解析法を示し、他解との比較により、本解析法の妥当性が確認された。

参考文献

- 1) L.Librescu, A.A.Khdeir and D.Frederick: A Shear Deformable Theory of Laminated Composite Shallow Shell-Type Panels and Their Response Analysis *Acta Mech.*, Vol.76, pp.1-33, 1989.
- 2) P.C.Yang, C.H.Norris and Y.Stavsky: Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *International Journal of Solids and Structures.*, Vol.2, pp.665-684, 1965.
- 3) J.N.Reddy: Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells, *ASCE*, Vol.110, No.5, pp.794-, 1984.