

積層板殻構造の幾何学的非線形解析

長崎大学 工学部 正 員 ○森田千尋

長崎大学 工学部 正 員 松田 浩

長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅

長崎大学 工学部 学生員 鈴木尉浩

1. まえがき

複合材料は、比強度、比剛性および軽量性に優れており、構造軽量化が重要なさまざまな産業分野で使用されている。一方向強化複合材を積層状にした積層板は力学的に強い異方性を示し、各層の材質、積層数および配向角などを変化させることにより、必要な方向に所要の特性を持たせられるため、適当に組み合わせることにより構造力学的に有利な構造を設計することができる。

本研究では、積層板および積層偏平シェルに関して、弾性係数比、積層数および配向角などをパラメータとして、非線形挙動特性を明らかにすることを目的としている。

2. 積層偏平シェルの基礎微分方程式

およびその離散解

曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり小さくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。図 1 に示すような N 層のラミナからなる積層偏平シェルの曲げに関する基礎微分方程式は、一次せん断変形理論に基づいて、次の増分形の連立偏微分方程式となる。

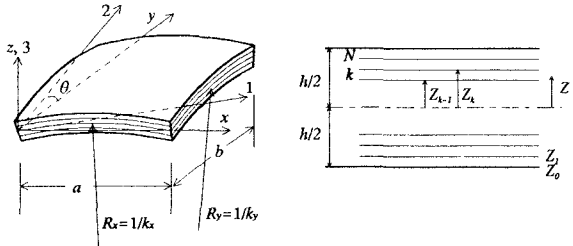


図1 積層偏平シェル

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left[k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Delta N_x + \left[k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Delta N_y + 2 \left[k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \Delta N_{xy} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} N_y + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} N_{xy} + \Delta N_c + \Delta q = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial v} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\Delta M_x = B_{11}\Delta e_x + B_{12}\Delta e_y + B_{16}\Delta e_{xy} + D_{11}\Delta \beta_x + D_{12}\Delta \beta_y + D_{16}\Delta \beta_{xy} \quad (1-6)$$

$$\Delta M_y = B_{12}\Delta e_x + B_{22}\Delta e_y + B_{26}\Delta e_{xy} + D_{12}\Delta\beta_x + D_{22}\Delta\beta_y + D_{26}\Delta\beta_{xy} \quad (1-7)$$

$$\Delta M_{xy} = B_{16}\Delta e_x + B_{26}\Delta e_y + B_{66}\Delta e_{xy} + D_{16}\Delta \beta_x + D_{26}\Delta \beta_y + D_{66}\Delta \beta_{xy} \quad (1-8)$$

$$\Delta Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (1-9)$$

$$\Delta Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (1-10)$$

$$\Delta N_x = A_{11}\Delta e_x + A_{12}\Delta e_y + A_{16}\Delta e_{xy} + B_{11}\Delta \beta_x + B_{12}\Delta \beta_y + B_{16}\Delta \beta_{xy} \quad (1-11)$$

$$\Delta N_v = A_{12} \Delta e_x + A_{22} \Delta e_v + A_{26} \Delta e_{xv} + B_{12} \Delta \beta_x + B_{22} \Delta \beta_v + B_{26} \Delta \beta_{xv} \quad (1-12)$$

$$\Delta N_{xy} = A_{16}\Delta e_x + A_{26}\Delta e_y + A_{66}\Delta e_{xy} + B_{16}\Delta \beta_x + B_{26}\Delta \beta_y + B_{66}\Delta \beta_{xy} \quad (1-13)$$

ここに、 Δ : 断面力および変形量の増分、 $q=q(x,y)$: 鉛直方向荷重強度、 $A_{ij}=\sum_{k=1}^N(\overline{Q_{ij}})_k(z_k-z_{k-1})$: 面内剛性、

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) : \text{カップリング剛性}, \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) : \text{曲げ剛性}, \quad E_1, E_2 : \text{材料主軸方}$$

向の弾性係数, ν_{12}, ν_{21} : ポアソン比, G_{12}, G_{13}, G_{23} : せん断弾性係数, $\kappa = 5/6$: せん断修正係数,

$$\overline{Q_{11}} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4, \quad \overline{Q_{12}} = Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2, \quad \overline{Q_{22}} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4,$$

$$\underline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3, \quad \underline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s,$$

$$\overline{Q_{66}} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4), \quad \overline{Q_{44}} = Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad \overline{Q_{45}} = (Q_{55} - Q_{44})cs, \quad \overline{Q_{55}} = Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2, \\ c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \quad Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x w + \Delta W_{xc} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y w + \Delta W_{yc} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - 2k_{xy} w + \Delta W_{xyc} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta \beta_x \\ \Delta \beta_y \\ \Delta \beta_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$\Delta N_c, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xyc}$: 各荷重段階における不平衡力および非線形項

式(1-1)~(1-13)において、無次元量 $X_1 \sim X_{13}$ および η, ξ

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_2 = a^2 Q_z / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_3 = a M_x / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_4 = a M_y / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_5 = a M_z / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \\ X_6 = \theta_x, \quad X_7 = \theta_y, \quad X_8 = w/a, \quad X_9 = v/a, \quad X_{10} = u/a, \quad X_{11} = a^2 N_x / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \quad X_{13} = a^2 N_z / [D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})], \\ \eta = x/a, \quad \xi = y/b, \quad a, b: \text{偏平シェルの矩形Baseの辺長}, \quad \mu = b/a, \quad h_0: \text{基準シェル厚}, \quad D_0 = E_2 h_0^3 / [12(1 - \nu_{12}\nu_{21})]:$$

基準シェル剛度

を導入し無次元化後、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シェルの任意の離散点における離散的近似解は次式のように求められる。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{r=0}^i a_{pijka} \Delta X_{rko} + \sum_{s=0}^j b_{pijld} \Delta X_{sl} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (2)$$

式(2)の導入過程については、文献1)2)を参照されたい。

3. 数値解析結果

数値解析例では、四辺固定支持され等分布荷重を受け、曲率 k_x, k_y およびねじれ率 k_{xy} を0とした積層板を取り扱う。また、各ラミナ材料特性は以下のである。

$$E_1/E_2 = 25, \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \quad G_{23} = 0.2E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

まず、逆対称クロスプライ積層板 ($\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の組み合わせから成り、逆対称に積層した板) に関して、積層数 N の違いによる中央点での荷重～たわみ曲線を図2に示す。図2より、 $N=2$ の場合は非線形挙動が異なるが、 $N=4$ 以上になるとあまり変化はみられない。

次に、逆対称アングルプライ積層板 ($+\theta$ と $-\theta$ の組み合わせから成る板、積層数 $N=2$) に関して、配向角の違いによる中央点での荷重～たわみ曲線を図3に示す。図3より、配向角を増加させると積層板は大きくたわんでくる。

積層偏平シェルに関しては、当日発表する予定である。

最後に数値計算を行って戴いた卒研生、寺園めぐみさんに謝意を表します。

[参考文献] 1) 崎山他: 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木論集, 338号, 1983. 2) 森田他: 変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析, 構造論集, Vol.40A, 1994.

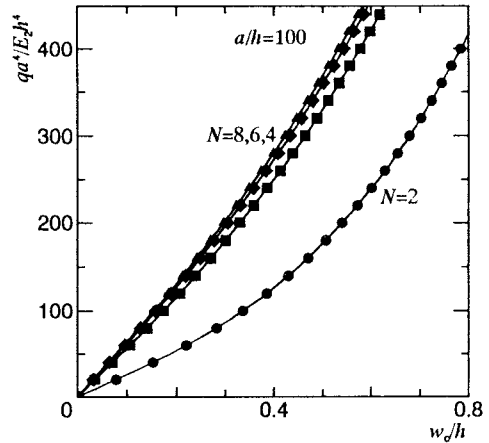


図2 逆対称クロスプライ積層板の荷重～たわみ曲線

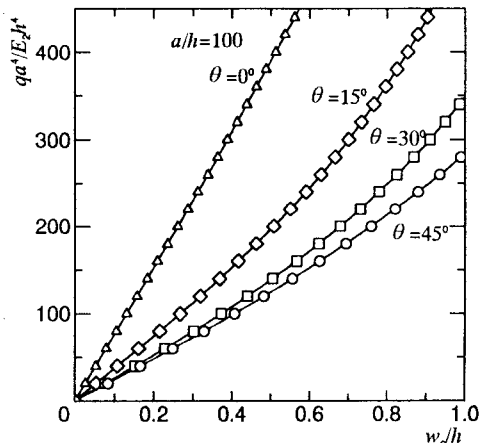


図3 逆対称アングルプライ積層板の荷重～たわみ曲線