等価介在物法を用いた弾塑性有限要素解析

九州工業大学　学生員　○安部剛史
九州工業大学　正　員　山口栄輝
東京大学　正　員　堀　宗朗
九州工業大学　正　員　久保喜延

1．はじめに

解析理論および解析手法の進歩により，弾塑性解析も比較的容易に行えるようになってきた。しかしながら，弾塑性解析は大量の計算時間を必要とするため，実務で気軽に用いるには至っていない。ところで，現実の構造物では塑性域が広範囲に広がるまでの計算を必要としない場合が多い。この点を利用し，平面骨組構造物を対象とした解析方法を著者らは先に提案している[1)]。本研究では，この解析法を拡張し，一般の固体を対象にした弾塑性解析手法を提案する。

2．定式化および解析手順

弾塑性問題は，基本的には増分境界値問題であり，その支配方程式系は次のように表される[2)]。

つり合い式　$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{F}_i = 0 \tag{1}$$

ひずみ－変位関係式　$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) \tag{2}$$

構成式　$$\dot{\sigma}_{ij} = D^{ep}_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} = D^{ep}_{ijkl}\,\dot{u}_{k,l} \tag{3}$$

境界条件　$$\dot{\bar{t}}_i = \dot{\sigma}_{ij}\,n_j \qquad on\ S \tag{4}$$

ここに，$\dot{\sigma}_{ij}$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{F}_i$，$\dot{u}_i$ はそれぞれ応力増分，ひずみ増分，荷重増分，変位増分である。なお，境界条件の$\dot{\bar{t}}_i$は与えられた境界量であり，n_jは境界に立てた外向き単位法線を示す。また，D^{ep}_{ijkl}は次式で示される弾塑性テンソルである。

$$D^{ep}_{ijkl} = D^{e}_{ijkl} - \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D^{e}_{pqkl} D^{e}_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \tag{5}$$

ここで，D^{e}_{ijkl}は弾性テンソル，h, f, g は材料の特性や応力等の関数である。以下では，まず従来の弾塑性有限要素解析法について簡単に記し，ついで本研究で提案する手法を記述する。

2．1　従来の解析法

仮想仕事の定理によれば次式が成り立つ。

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV = \int_V \dot{F}_i\,\delta\dot{u}_i\,dV + \int_S \dot{\bar{t}}_i\,\delta\dot{u}_i\,dA \tag{6}$$

ここで，$\delta\dot{u}_i$，$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$は仮想変位増分および仮想ひずみ増分である。

アイソパラメトリック要素を用いる場合，変位増分$\dot{u}_i$は節点変位増分$\dot{U}^a_i$と形状関数N^aを使って次のように表される。

$$\dot{u}_i = N^a \dot{U}^a_i \tag{7}$$

この式では，節点番号を表す上付き添字aについて総和規約を適用している。式(7)を用いれば，式(6)は次のように書き換えられる。

$$\delta\dot{U}^a_i\left[\int_V \dot{\sigma}_{ij}\,N^a_{,j}\,dV\right] = \delta\dot{U}^a_i\left[\int_V \dot{F}_i\,N^a dV + \int_S \dot{\bar{t}}_i\,N^a dA\right] \tag{8}$$

ここで，$\delta\dot{U}^a_i$は任意であるので次式の離散化されたつり合い式を得る。

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} N^a_{,j}\, dV = \int_V \dot{F}_i N^a dV + \int_S \bar{\dot{t}}_i N^a dA \tag{9}$$

さらに，式(3)，(7)を用いれば，次式が得られる。

$$\left[\int_V N^b_{,l} D^{ep}_{ijkl} N^a_{,j}\, dV\right] \dot{U}^b_k = \int_V \dot{F}_i N^a dV + \int_S \bar{\dot{t}}_i N^a dA \tag{10}$$

上式の左辺の括弧内は剛性マトリクス，右辺は外力ベクトルである。従来の解析法では，各荷重ステップにおいて式(10)の連立一次方程式を解き，変位等を更新することにより計算を行うことになる。

2.2 等価介在物法を適用した解析法

等価介在物法は，不均質材料を均質材に置き換えて解析する方法で，問題の等価性を保証するためにアイゲン応力を導入する[3)]。均質材料への置き換えにより，数学的取り扱いが容易になることがこの手法の利点である。等価介在物法を増分境界値問題に適用する際には，式(3)の構成式を次式で置き換えることになる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^e_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\sigma}^*_{ij} \tag{11}$$

ここに，$\dot{\sigma}^*_{ij}$ はアイゲン応力増分である。前節と同様にして，次式の有限要素方程式を得る。

$$\left[\int_V N^b_{,l} D^e_{ijkl} N^a_{,j}\, dV\right] \dot{U}^b_k = \int_V \dot{F}_i N^a dV + \int_S \bar{\dot{t}}_i N^a dA - \int_V \dot{F}^*_i N^a dV \tag{12}$$

ここで，左辺括弧内の剛性マトリクスは弾性挙動時のものであり変化しない。右辺の$\dot{F}^*_i$は等価節点アイゲン力増分で，アイゲン応力増分$\dot{\sigma}^*_{ij}$の線形関数となる。$\dot{\sigma}^*_{ij}$が求められれば，式(12)より節点変位増分$\dot{U}^b_k$は直ちに計算できる。

・アイゲン応力の求め方

等価介在物法では，D^{ep}_{ijkl}をD^e_{ijkl}に置換する代わりにアイゲン応力増分$\dot{\sigma}^*_{ij}$を作用させる。問題の等価性を保つために次式の条件を課す。

$$D^{ep}_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{kl} = D^e_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\sigma}^*_{ij} \tag{13}$$

$\dot{\sigma}^*_{ij}$はこの式より決定することになる。ひずみ増分$\dot{\varepsilon}_{ij}$は，外力増分$\dot{P}_k$とアイゲン応力増分による部分から成り，次のように表現される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = G_{ijk} \dot{P}_k - H_{ijkl} \dot{\sigma}^*_{kl} \tag{14}$$

式(14)を式(13)に代入すれば，$\dot{\sigma}^*_{ij}$に関する連立一次方程式が得られる。この方程式を解くことにより，$\dot{\sigma}^*_{ij}$が定められる。

3. おわりに

式(12)は連立一次方程式を示すが，その係数行列は変化しない。このため，係数行列の逆行列は一度計算すれば十分である。すなわち，本解析法の主たる計算は$\dot{\sigma}^*_{ij}$を決定するための連立一次方程式(14)の解法となる。塑性域が限定された問題では，この連立一次方程式系の式数は式(12)のそれよりはるかに少なく，従って計算時間も少なくてすむことになる。なお，この利点を実証するための計算例は，紙面の都合上，口頭発表で示す。

参考文献

1）山口栄輝 他：等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析，構造工学論文集，Vol.41A 1995.3.（掲載予定）

2）北川浩：塑性力学の基礎，日刊工業新聞社，1979.

3）Nemat-Nasser, S. and Hori, M. : Micromechanics: Overall Properties of Hetergeneous Materials, North-Holland, Netherlands, 1993.