

対称骨組構造の分岐解析について

熊本大学工学部 ○学生員 橋本 淳也
 同 上 正 員 三池 亮次
 熊本大学自然科学研究科 正 員 佐藤 啓治
 熊本大学工学部 正 員 小林 一郎

1. はじめに

対称な荷重を受ける対称なブレースアーチや、トラストームのような立体または平面骨組構造は、変位が微小であるときには、変形を対称となる。しかしながら、荷重が大きくなり弾性不安定状態に達すると、骨組構造の形態に応じて、ある場合には荷重変位曲線の極限点において、対称モードをもって座屈し、また、ある場合には構造と変位の対称性にも関わらず、非対称モードをもつ分岐座屈が現れる。ここでは荷重と構造の対称性を考慮して接線剛性マトリクス K_T を修正し、分岐点からの荷重と変位の変分の関係が、柱や薄板の分岐座屈と同じ形式で表されることを明らかにする。また、極限点において屈服する条件、極限点において非対称の分岐条件についても修正接線剛性マトリックスを用い検討する。なお、Ikeda 等²⁾ は対称構造物の分岐問題を、群論的手法を用い、接線剛性マトリックス K_T をブロック対角化し、解析している。

2. 対称骨組構造の非対称分岐座屈の数値モデル

分岐座屈点からの荷重と変位の変分 δp と δd の間に次式

$$K_T \delta d = \delta p \quad (1)$$

が成立するものとする。図-1に示す7部材対称トラストアーチの節点3に鉛直方向荷重 p が作用する簡単な例題を通して非対称分岐座屈を表す数値モデルを誘導する。このトラストアーチの変形が対称であるためには次のような荷重と変位の対称条件が成立しなければならない。

- (1) 節点3における水平方向の変位と荷重について $\delta d_{3x} = 0$, $\delta p_{3x} = 0$ である。
 - (2) 節点2と4における鉛直方向変位と荷重について $\delta d_{2y} = \delta d_{4y}$, $\delta p_{2y} = \delta p_{4y}$
 - (3) 節点2と4における水平方向変位と荷重について $\delta d_{2x} = -\delta d_{4x}$, $\delta p_{2x} = -\delta p_{4x}$
- したがって、荷重と変位を

$$\left. \begin{aligned} \delta d'_{4x} &= \delta d_{2x} + \delta d_{4x} & \delta p'_{4x} &= \delta p_{2x} + \delta p_{4x} \\ \delta d'_{4y} &= \delta d_{2y} - \delta d_{4y} & \delta p'_{4y} &= \delta p_{2y} - \delta p_{4y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のように変換し、また

$$\left. \begin{aligned} \delta d_1'^T &= [\delta d_{3x} \quad \delta d_{4x} \quad \delta d'_{4y}] & \delta p_1'^T &= [\delta p_{3x} \quad \delta p'_{4x} \quad \delta p'_{4y}] \\ \delta d_2'^T &= [\delta d_{2x} \quad \delta d_{2y} \quad \delta d_{3y}] & \delta p_2'^T &= [\delta d_{2x} \quad \delta d_{2y} \quad \delta d_{3y}] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とすると、荷重の対称性から $\delta p_1' = 0$ である。また、変位が小さいときは変形も対称であるから $\delta d_1' = 0$ となるべきで、(3) 式の修正された荷重と変位の変分の間には次式

$$\begin{bmatrix} K'_{T11} & 0 \\ K'_{T21} & K'_{T22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta d_1' \\ \delta d_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta p_2' \end{bmatrix}, \quad K'_T = \begin{bmatrix} K'_{T11} & 0 \\ K'_{T21} & K'_{T22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

が成立すべきである。ここに、 $K'_{Tij} (i=1,2, j=1,2)$ は言わば修正接線剛性マトリックスである。

一般に、対称な荷重を受ける対称な任意の骨組構造物においても、式(2)に相当する変換を行うとき、(4)式と同じ形式の基礎式が導かれるであろう。

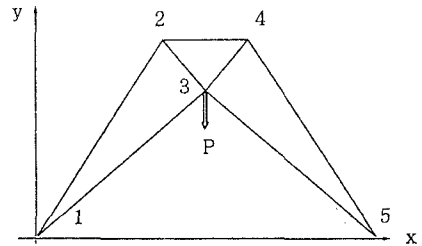


図-1 7部材対称トラストアーチ

(4) 式において荷重と変位が小さいときは変形は対称であるべきである。したがって、 $\mathbf{K}'_{T11}$ の行列式 $|\mathbf{K}'_{T11}| \neq 0$ で $\delta \mathbf{d}'_1 = \mathbf{0}$ である。しかしながら、荷重が増大し $|\mathbf{K}'_{T11}| = 0$ であるとき、(4) 式で $\delta \mathbf{d}'_1 = \mathbf{0}$ の外 $\delta \mathbf{d}'_1 \neq \mathbf{0}$ の解が存在し得る。

また、このとき式 (4) において $|\mathbf{K}'_T| = |\mathbf{K}'_{T11}| |\mathbf{K}'_{T22}|$ であるから、 $|\mathbf{K}'_T| = 0$ である。したがって $|\mathbf{K}'_{T11}| = 0$ は臨界状態の条件で、この荷重に対して (4) 式で $\delta \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0}$ $\delta \mathbf{d}'_1 \neq \mathbf{0}$ であるようなモード $\delta \mathbf{d}'_1$ $\delta \mathbf{d}'_2$ が存在する。同時に $\delta \mathbf{d}'_1 = \mathbf{0}$ かつ $\delta \mathbf{d}'_2 = \mathbf{K}'_{T22}{}^{-1} \delta \mathbf{p}'_2$ で与えられる。図-2

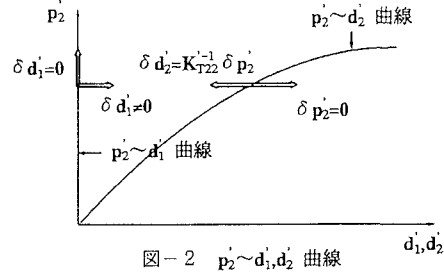


図-2 $p_2 \sim d_1, d_2$ 曲線

示される方向も存在する。このことは対称骨組構造の変形が、この臨界点において対称から非対称に変わり得ることと $p_2 \sim d_1$ 曲線は図-2に示すように分岐することを意味する。つまり、(4) 式では分岐座屈の条件となる。

軸方向荷重を受ける柱や、面内荷重を受ける板が臨界荷重に達すると柱または面に垂直方向に自由度を拡張するようなモードをもって分岐座屈を起こす。この数理モデルも (4) 式と同じ形式で与えられるであろう。

(4) 式において $|\mathbf{K}'_{T11}| \neq 0$ で $|\mathbf{K}'_{T22}| = 0$ は $p_2 \sim d_2$ 曲線の極限点における対称モードをもった屈服条件となる。 $|\mathbf{K}'_{T11}| = 0$ 、 $|\mathbf{K}'_{T22}| = 0$ は $p_2 \sim d_1$ 曲線の極限点における分岐座屈条件である。

図-3にトラスドームの分岐座屈モードを示した。(2) 式に相当する変数変換によって (4) 式と同じ形式の関係が得られた。また、このとき $|\mathbf{K}'_{T11}| = 0$ かつ $|\mathbf{K}'_{T22}| \neq 0$ で分岐座屈の条件を満足していることがわかった。

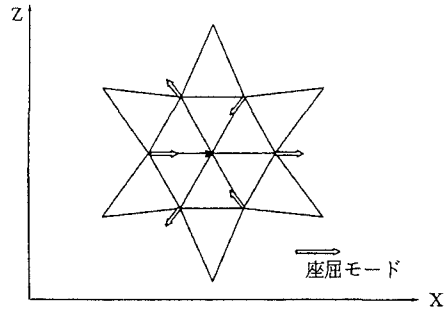


図-3 24部材トラスドームの座屈モード

3 一般骨組構造の分岐と屈服

必ずしも荷重と構造が対称でない場合 $\delta \mathbf{p}$ と $\delta \mathbf{d}$ の間に

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{T11} & \mathbf{K}'_{T12} \\ \mathbf{K}'_{T21} & \mathbf{K}'_{T22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}'_1 \\ \delta \mathbf{d}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{p}'_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

の関係が成立する場合には、上式の接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_T$ を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T11} & \mathbf{K}_{T12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}''_{T22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}'_1 \\ \delta \mathbf{d}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{p}'_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}''_{T22} = \mathbf{K}_{T22} - \mathbf{K}_{T21} \mathbf{K}_{T22}^{-1} \mathbf{K}_{T12} \quad (6)$$

のように修正する。このとき $\delta \mathbf{d}_2 \rightarrow \infty$ であるから、 $|\mathbf{K}''_{T22}|$ は極限点における屈服条件となる。もし、 $|\mathbf{K}''_{T22}| \neq 0$ で $|\mathbf{K}_{T11}| = 0$ であれば、 $\delta \Delta \mathbf{d}_2 = \mathbf{K}''_{T22}{}^{-1} \delta \mathbf{p}_2$ の方向と $\delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ の方向に分岐する。

分岐座屈か屈服かの判定は座屈を防止するための工法や座屈後挙動解析に不可欠である。また、座屈固有値解析の次数を低減することができる。

参考文献

- (1) Miike, R., Kobayashi, I., Yamada, Z.: Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, ASCE, 1990
- (2) Ikeda, K., Murota, K., Fujii, H.: Bifurcation and Postbuckling Behavior of Symmetric Structures, J. Solid Structures, 1994