ベイズ推定における離散化について

九州工業大学　正　員○山口栄輝
九州工業大学　学生員　田口誠司

1. はじめに

強力な計算機が手軽に利用できるようになった現在では，多くの分野で逆問題が注目されており，著者の一人も岩盤浸透流問題を対象として，ベイズ推定による逆解析を行っている[1].

線形な逆問題でも解析的に解ける問題はまれであり，ほとんどの場合，適当な離散化によって数値的に解を得ることになる．本研究では，離散化の方法として，解析対象領域を小領域に分割する場合を扱う．与えられた情報が多ければ，一般にそこから得られる情報も多くなることを思えば，与件に見合った適切な分割数が存在すると考えられる．本研究では，ベイズ推定を対象に，この点に関して考察を加える.

2. ベイズ推定[2]

離散化により得られた次の連立一次方程式を，xについて解く逆問題を考える.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \tag{1}$$

観測誤差eと原ベクトルxの確率密度関数がわかっている場合，観測値bが与えられれば，ベイズの定理より，xのbに対する条件付き確率密度関数（事後確率）が求められる．ベイズ推定では，この事後確率を最大にする原ベクトルxの値を逆問題の解とする.

3. 解析例

解析対象として，図－１に示す単純梁を取り上げる．この梁は不均質な材料で作られているが，等価介在物法の考えに基づき，その不均一性をアイゲンモーメントxで代表させる[3]．ここでは，xの分布は階段状に変化するとし，図－１に示すように，５等分した梁の各区間で一定値をとるものする．これらの値は正規分布に従う乱数を発生させて得られたものである.

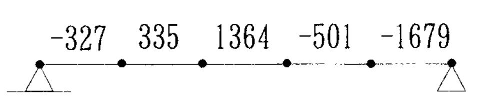
梁を10等分する点において，このxによるたわみを計算し，その最大値の±2%以内におさまる確率が90%になるような正規分布を設定して乱数を発生させ，それを誤差として加えたものを観測値bとする．ここでは，bの値，eおよびxの確率密度関数から，xの分布を算定する逆問題を考える.

梁を有限個に等分割し，各区間においてxは一定というモデルを設定すれば，式(1)が容易に得られ，ベイズ推定によりxが求められる．このようにして得られるxは，分割数に大きく依存する.

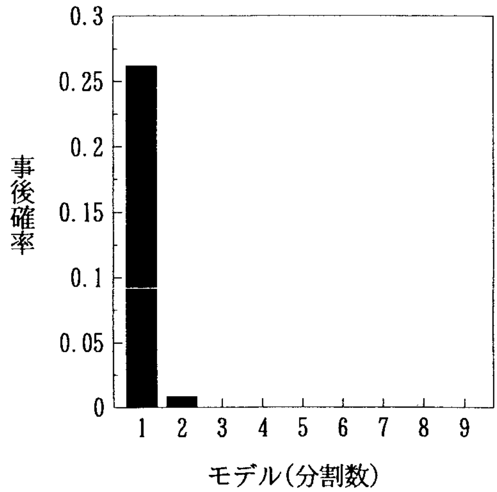
3.1 確率密度関数によるモデルの評価

ベイズ推定では事後確率を最大にするようxを定めるが，その最大値はモデルに依存する．ここでは，この値を，異なる分割数を有するモデル間の比較に用いることを検討する．そのために，いくつかのモデルについてこの最大値を計算し，まとめたのが図－２である．また各モデルによって得られたxと真のx分布の差（誤差）の二乗和を図－３に示している.

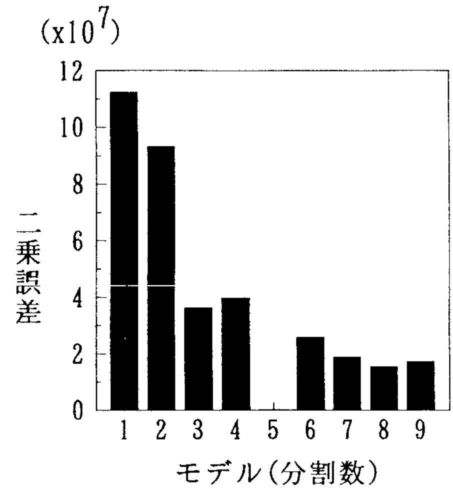
図－２，３によれば，分割数１のモデルで事後確率は最大となるのに対し，真のx分布との差が最小となるのは分割数が５の場合であることがわかる．この結果より，事後確率はモデル間の比較には適用できないと判断される.



図－１　アイゲンモーメント分布



図－２　事後確率の最大値



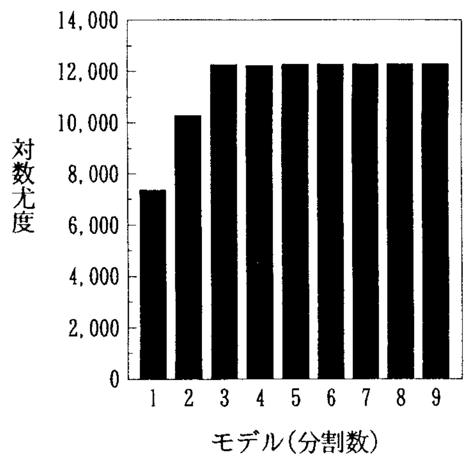
図－３　二乗誤差

３．２ 対数尤度によるモデルの評価

真の分布とモデルの「近さ」を表す客観的な規準に対数尤度があり，その値が大きいほど良いモデルとされる[4)]．ここでは，対数尤度によるモデルの評価について検討する．

図－１の例題では，与件から**b**の確率密度関数を求めることができる．対数尤度は，観測値に対するこの確率密度関数の対数として定義され，各モデルについて算出した値を図－４に示している．

この図によれば，分割数５のモデルで対数尤度は最大値をとる．また図－３より明らかなように，このモデルで誤差は最小となり，対数尤度がモデル判定の目安になりうることが理解される．



図－４　対数尤度

４．まとめ

例題により，対数尤度がモデル判定の目安になることを示した．この結果は，また，拡張ベイズ推定[5)]等のＡＩＣを用いたアプローチの有効性を示唆するものであり，今後さらに検討を加える予定である．

参考文献

1)山口栄輝，堀宗朗，細川直行：岩盤浸透流問題の新しい定式化とベイズ推定の適用，構造工学論文集，Vol. 40A，pp. 445-450，1994.
2)岡本良夫：逆問題とその解き方，オーム社，1992.
3)山口栄輝，堀宗朗，久保喜延：等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析，構造工学論文集，Vol. 41A，1995（掲載予定）.
4)坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎：情報量統計学，共立出版，1983.
5)Honjo, Y., Liu, W.-T., Sakajo, S. : Application of Akaike Information Criterion Statistic to Geotechnical Inverse Analysis: Extended Bayesian Method, Structure Safety, 1994.