平面2次元k-εモデルのモデル定数の検討

九州大学大学院 学生員○矢野真一郎 九州大学工学部 正 員 小松 利光
九州大学工学部 正 員 中村 由行 九州大学工学部 正 員 朝位 孝二

1. はじめに 水深方向に比較して非常に大きな水平方向スケールを持つ流れ場や拡散場において、流況や拡散のシミュレーションに平面2次元モデルを用いた解析がよく行われている。その際、渦動粘性係数・渦動拡散係数を自動的に評価できるk-ε乱流モデルを併用した解析が行われる場合がある[1]。しかしながら、それらの解析ではモデル定数に3次元モデルでの値をそのまま用いている場合が多く、厳密な意味でのk, εの鉛直平均値を評価しているとは言えない。最近、著者らは流速U、乱れエネルギーk、乱れエネルギーの散逸率ε、渦動粘性係数ν_tの鉛直分布を仮定することにより、より厳密な平面2次元k-ε乱流モデルのためのk, ε方程式の定式化を行った[2]。しかし、その定式化に際して仮定されたεの鉛直分布形には実際の分布をうまく表していない部分があった。そこで、今回はより現実に近いεの鉛直分布形を仮定して、再度平面2次元モデルのためのk, ε方程式の定式化を行った。

2. 平面2次元k-ε乱流モデルと補正係数の誘導

3次元k-ε乱流モデルにおけるk, ε方程式及び、渦動粘性係数ν_tは次式の様に表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)+P-\varepsilon \quad (1) \qquad \nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+U_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right)+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2) \qquad P=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

ここで、$i, j=1, 2, 3, \sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3, C_{1\varepsilon}=1.44, C_{2\varepsilon}=1.92, C_\mu=0.09$である。

次に、粗面開水路流における水平方向流速U、及びk, ε, ν_tの鉛直分布として次の式を仮定した。

$$\frac{U}{U_*}=\frac{1}{\kappa}ln\left(\frac{\xi}{\xi_s}\right)+A_r \quad (4) \qquad \frac{k}{U_*^2}=D\ exp\left(-2\xi\right) \quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon h}{U_*^3}=\frac{E\ exp\left(-3\xi\right)}{\sqrt{\xi}} \quad (6) \qquad \frac{\nu_t}{U_* h}=\kappa\xi\left(1-\xi\right) \quad (7)$$

ここで、$\xi=z(=x_3)/h, \xi_s=k_s/h, A_r=8.5, h$: 水深、$k_s$: 相当粗度、$\kappa$: カルマン定数($=0.4$)、$U_*$: 底面における摩擦速度、$D=4.78, E=9.76$である。(5), (6)式は禰津[3]による半理論式である。

式(4), (5), (6), (7)よりU, k, ε, ν_tの鉛直平均値$\overline{U}, \overline{k}, \overline{\varepsilon}, \overline{\nu_t}$を求めると、以下の様になる。

$$\frac{\overline{U}}{U_*}=\frac{1}{\kappa}ln\left(\frac{1}{\xi_s}\right)-\frac{1}{\kappa}+A_r\equiv\varphi \quad (8) \qquad \frac{\overline{k}}{U_*^2}=a_k=2.07 \quad (9)$$

$$\frac{\overline{\varepsilon}h}{U_*^3}=a_\varepsilon=9.84 \quad (10) \qquad \frac{\overline{\nu_t}}{U_* h}=\frac{\kappa}{6}=a_{\nu_t} \quad (11)$$

式(1), (2), (3)を鉛直方向に積分することにより平面2次元k-ε乱流モデルにおけるk, ε方程式、及び$\overline{\nu_t}, \overline{k}, \overline{\varepsilon}$の関係式が得られる。積分する際、式(1), (2), (3)の各項には2つ以上の物理量の積の形が含まれているために、一種の分散効果が生じると考えられる。そこで、積分することにより生じる分散効果を考慮し補正するために各項に補正係数を乗じた形で平面2次元モデルにおけるk, ε方程式、及び$\overline{\nu_t}$と$\overline{k}, \overline{\varepsilon}$の関係式を表したのが次式である。

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \beta_{kHA}\,\overline{U_i}\,\frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_{kHD}\,\frac{\overline{\nu_t}}{\sigma_k}\,\frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i}\right) + \beta_{kHP}\,P_H + C_k\,\frac{U_*^3}{h} - \bar{\varepsilon} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \beta_{\varepsilon HA}\,\overline{U_i}\,\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_{\varepsilon HD}\,\frac{\overline{\nu_t}}{\sigma_\varepsilon}\,\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i}\right) + \beta_{\varepsilon HP}\,C_{1\varepsilon}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}}\right) P_H + C_\varepsilon\,\frac{U_*^4}{h^2} - \beta_{2\varepsilon}\,C_{2\varepsilon}\,\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \tag{13}$$

$$\overline{\nu_t} = \beta_{\nu_t}\,C_\mu\,\frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \tag{14}$$

ここで、 $P_H = \overline{\nu_t}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$

$U_i, k, \varepsilon, \nu_t$ に式(4)-(7)を仮定し、式(8)-(11)を用いて式(1)-(3)を鉛直方向に積分して求めた各係数の算定式を図－1に示す。係数のうち $C_k, C_\varepsilon, \beta_{2\varepsilon}$ の算定式に関しては ξ_s（式(8)より流速係数 φ を与えて逆算）から $\xi=0$ までの領域について、流速を直線分布、$k = \text{const.} = DU_*^2$, $\varepsilon = \text{const.} = \varepsilon(\zeta_s)$ と仮定し積分を行った。$\beta_{\nu t}, \beta_{kHD}, \beta_{\varepsilon HD}$ 以外の係数は流速係数 φ の関数になった。$\varphi = 10, 15, 20$ のときの各係数の計算値と $\beta_{\nu t}, \beta_{kHD}, \beta_{\varepsilon HD}$ の値を表－1に示す。それによると、φ により値がかなり変化する係数があることが分かった。また、Rastogi and Rodi[1]が等流の場合について求めた係数 C_k, C_ε の算定式（式(15), (16)）と比較すると、C_k はほぼ同じ式になっているが、C_ε に関しては φ が増加するにつれてかなり両者の差が大きくなることが分かった。

■ $\beta_{kHA} = \frac{D}{a_k\,\varphi}(-1.65 + 0.432\,A)$　■ $\beta_{\varepsilon HA} = \frac{E}{a_\varepsilon\,\varphi}(-7.84 + 1.01\,A)$

■ $\beta_{kHD} = \frac{0.0677\,\kappa D}{a_{\nu_t}\,a_k} = 0.939$　■ $\beta_{\varepsilon HD} = \frac{0.0924\,\kappa E}{a_{\nu_t}\,a_\varepsilon} = 0.549$

■ $\beta_{kHP} = \frac{1}{\varphi^2\,a_{\nu_t}}\left(0.44 - \frac{5A}{18} + \frac{\kappa A^2}{6}\right)$　■ $\beta_{\nu_t} = \frac{a_{\nu_t}\,a_\varepsilon}{C_\mu\,a_k^2} = 1.71$

■ $\beta_{\varepsilon HP} = \frac{a_k\,E}{a_\varepsilon\,a_{\nu_t}\,D\,\varphi^2}(0.985 - 0.44\,A + 0.178\,\kappa A^2)$　■ $C_k = \varphi + \frac{\xi_s}{\kappa} \approx \varphi$

■ $C_\varepsilon = \frac{C_{1\varepsilon}\,E}{D}\left[\frac{1}{\kappa}\int_{\xi_s}^{1}\frac{exp(-\xi)}{\xi\sqrt{\xi}}(1-\xi)\,d\xi + \kappa A_r^2\,\frac{exp(-3\,\xi_s)}{\sqrt{\xi_s}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_s}{3}\right)\right]$

■ $\beta_{2\varepsilon} = \frac{a_k\,E^2}{a_\varepsilon^2\,D}\left[\int_{\xi_s}^{1}\frac{exp(-4\,\xi)}{\xi}\,d\xi + exp(-6\,\xi_s)\right]$　ここで、 $A = -\frac{1}{\kappa}\ln\xi_s + A_r$

図－1　各係数の算定式

表－1　各係数の計算値

φ	β_{kHA}	$\beta_{\varepsilon HA}$	β_{kHP}	$\beta_{\varepsilon HP}$	$\beta_{2\varepsilon}$	C_k	C_ε
10	0.869	12.5	1.11	0.427	0.255	10.0	51.6
15	0.912	17.5	1.07	0.433	1.10	15.0	287.9
20	0.934	22.5	1.05	0.438	1.97	20.0	894.4

$\beta_{\nu t}$	1.71
β_{kHD}	0.939
$\beta_{\varepsilon HD}$	0.549

$$C_k = \varphi \tag{15}$$

$$C_\varepsilon = 3.6\,\varphi^{3/2}\,C_{2\varepsilon}\,C_\mu^{1/2} \tag{16}$$

3.結論　U, k, ε, ν_t の鉛直分布形を仮定することにより平面２次元 k-ε 乱流モデルのモデル定数を算定した。これらの補正係数を用いることにより k, ε, ν_t の鉛直平均値をより正確に求めることができると思われる。今後は、補正の効果についてシミュレーションにより検討を行う予定である。最後に多くの助言を頂いた九州大学名誉教授椿東一郎先生と本研究を補助していただいた（財）服部報公会に、記して謝意を表します。

［参考文献］ 1). Rastogi, A. K., and Rodi, W. : Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels, J. Hydr. Div., ASCE, vol. 104, No. HY3, 1978 2).矢野真一郎,小松利光,朝位孝二,中村由行,松永康司:平面２次元 k-ε モデルの定式化,土木学会第48回年次学術講演会講演概要集第2部, pp.750-751, 1993 3).禰津家久,中川博次:自由水面を考慮した開水路乱流の数値計算手法－修正 k-ε 乱流モデルによる解法－,京都大学防災研究所年報, 第29号, pp. 647-673, 1986