

移流方程式の数値解の安定化に関する研究について

九州大学大学院 学生員 ○塩見 尚潔

九州大学工学部 正 員 朝位 孝二

九州大学工学部 正 員 小松 利光

1.はじめに

現在、移流方程式を解くための高精度計算スキームが種々提案されている。これらのスキームは、スキーム中に取り込む格子点が多く境界付近の取り扱いに工夫が必要であることが多い¹⁾。さらに、この種のスキームは不必要な振動を引き起こすことが知られている。一方、風上差分は使用する点が少なく、振動も生じず取り扱いが容易であるが数値拡散の影響を無視できない。風上差分の誤差の筆頭項を差し引けば、ある程度精度は改善され、なおかつ使用する点が少ないスキームが得られる。しかしながら、この場合は上述の不必要な振動が解に現れることになる²⁾。本研究は、このような非物理的な数値振動を除去するための判定条件を設定して数値解の安定化を試みたものである。

2.基礎式

(1) 式で表わされる1次元純粋移流方程式を風上差分で差分化した際に生じる無限に続く打ち切り誤差項のうち、筆頭項から生じる数値拡散が支配的であるためこの項を差し引くと(2)式のようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{\Delta x} = K_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2)$$

ここで $\alpha = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$: クーラン数

$$K_x = -\alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t}$$

(2)式の右辺は補正項である。尚、この式の差分形はLax-Wendroffスキームと同形である。このスキームによって解の数値拡散はある程度改善されるが、負の拡散係数 K_x を与えているために数値不安定となり不必要な振動が発生してしまう²⁾。このような振動を取り除き解の安定化を図るために以下に示すような判定条件を導入した。

3.判定条件

図-1に示すように計算に使用する3点の値が単調増加または単調減少の場合、 $\hat{\Phi}_i^n$ を(3)式のように定義すると $\hat{\Phi}_i^n$ は0から1の間の値を取る³⁾。このとき、クーラン数が0から1の間にあるなら、 $n+1$ stepの*i*点の数値解は*n* stepの*i-1*から*i*点の間の値を取るはずである。補正したUPWINDの数値解が数値不安定のためにこの間からはずれる事が数値振動の発生原因と考えられる。よって、このときには補正せずUPWINDの安定性を利用して解の安定化を図る。 $\hat{\Phi}_i^{n+1}$ を(4)式のように定義して補正UPWINDで計算するかどうかの判定条件を図-2のフローチャートに示す。

$$\hat{\Phi}_i^n = \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n} \quad (3)$$

$$\hat{\Phi}_i^{n+1} = \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_{i-1}^{n+1}}{\Phi_{i+1}^{n+1} - \Phi_{i-1}^{n+1}} \quad (4)$$

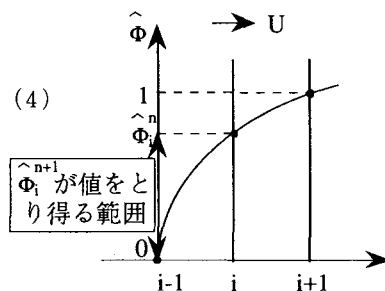


図-1 判定の概念図

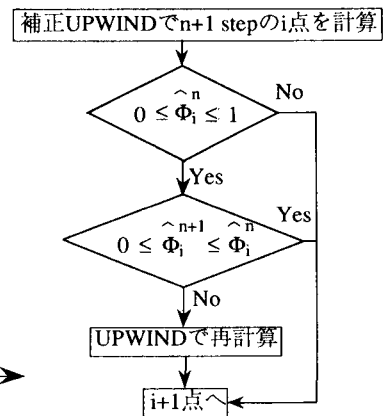


図-2 判定のフローチャート

4.計算精度の比較

この判定方法の精度を比較するために、Case-1、2に示す初期条件を使用して流速 $u=0.5$ m/sで9600sの間下流へ移流させる1次元のモデル計算を行った。

Case-1 ピーク値10、標準偏差264m、中心位置 $x=1400\text{m}$ のGauss型濃度分布

Case-2 $\Phi(x, 0) = \begin{cases} 10.0 & \text{for } (x - \Phi_0) \leq 0 \\ 0.0 & \text{for } (x - \Phi_0) > 0 \end{cases}$ の段波型濃度分布 $\Phi_0 = 1200\text{m}$

尚、計算条件はそれぞれのCaseにおいて $\Delta x=200\text{m}$ 、 $\Delta t=100\text{s}$ と $\Delta x=100\text{m}$ 、 $\Delta t=50\text{s}$ の2通りで計算を行った。計算結果を図-3、4、5、6に示す。

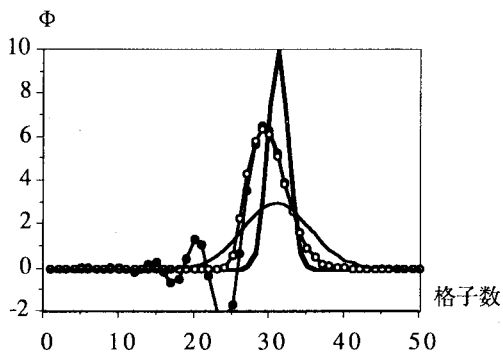


図-3 Case-1 ($\Delta x=200\text{m}$ 、 $\Delta t=100\text{s}$)

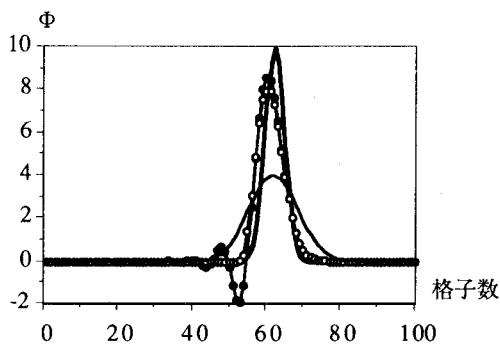


図-4 Case-1 ($\Delta x=100\text{m}$ 、 $\Delta t=50\text{s}$)

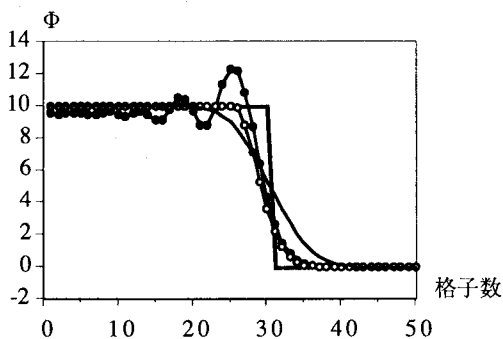


図-5 Case-2 ($\Delta x=200\text{m}$ 、 $\Delta t=100\text{s}$)

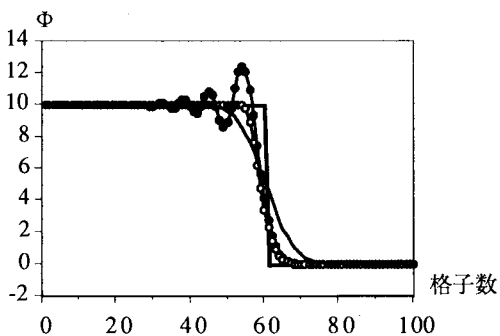
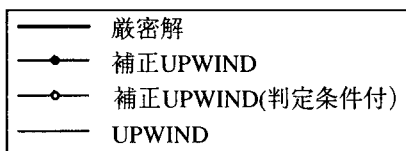


図-6 Case-2 ($\Delta x=100\text{m}$ 、 $\Delta t=50\text{s}$)



5. おわりに

以上の計算結果より分布の裾野付近に発生していた振動が判定条件を設けることにより抑えられることがわかった。位相誤差は改善されないものの、この判定条件により、計算に使用する点が少なく簡便で、しかもある程度高い計算精度を持つ安定な計算を行うことができるといえる。

6. 参考文献

- 1) 小松・大串・朝位：拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発, 土木学会論文集 No.456/II-21, pp.37-46, 1992.
- 2) 村上 健：非定常拡散方程式の数値計算方法, 第19回海岸工学講演会論文集, pp.265-269, 1972.
- 3) B.P.Leonrd: Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities, Int.j.numer.methods fluids, 8, pp.1291-1318, 1988.