

拡散シミュレーションにおける移流計算スキームの選択方法

九州大学 学生員○吉村耕市郎 九州大学 正会員 小松利光
九州大学 正会員 朝位孝二

1. はじめに 移流拡散方程式の数値計算を行う際、移流項の取扱いは慎重な配慮が必要である。このため種々の移流計算スキームが提案されているが、スキームごとに精度は異なり、また同一スキームでも拡散係数や流速等の水理条件及び計算格子の大きさ等の計算条件により誤差の現われ方は変化する。本研究では、拡散シミュレーションにおいてどれが最適な移流計算スキームであるかを判断するための選択方法の開発を試み、またその検証のためのモデル計算を行った。

2. 誤差解析及び相対誤差について¹⁾ 一次元純粋移流方程式を差分法で離散化し、Taylor級数展開による誤差解析を行えば無限に続く打ち切り誤差項が評価できる。これらの項を二次の誤差項のみで代表させると以下のような

$$\frac{K\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2!} k_2(\alpha) + \frac{1}{3!} k_3(\alpha) \left(\frac{\Delta x}{B} \right) \left(\left| \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right| / \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right| \right) + \frac{1}{4!} k_4(\alpha) \left(\frac{\Delta x}{B} \right)^2 \left(\left| \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right| / \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right| \right) + \dots \quad (1)$$

る。

(1) 式において、 Φ_0 は代表濃度、 Φ は無次元濃度、 Δx はX方向の計算格子間隔、 B は代表長さスケール、 x は無次元長さである。 α はクーラン数とよばれ $\alpha \equiv u \cdot \Delta t / \Delta x$ と定義されている。 $k_2, k_3, k_4, \dots$ はそれぞれの次数の誤差項の係数であり α の関数である。またその関数形はスキームに依存する。(1)式と $\Delta x/B$ の関係を図-1に示す。また Φ を拡散物質の濃度、 $\Psi (\equiv D / (D+K))$ を物理拡散の数値拡散に対する相対的な強さを表わすパラメータとすると、相対誤差 $(\Phi - \Phi') / \Phi$ と Ψ の関係はガウス分布を利用して図-2のようになる。 $t_* (\equiv D t / \sigma^2)$ は拡散計算時間 t を物理拡散係数 D とガウス分布の標準偏差 σ で無次元化したものであり、図-2は Ψ をパラメータにして相対誤差を t_* に対してプロットしたものである。

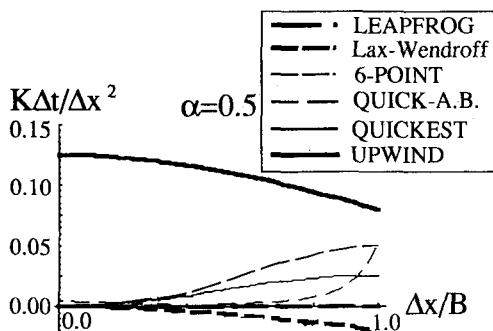


図-1 $K\Delta t / \Delta x^2$ と $\Delta x/B$ の関係

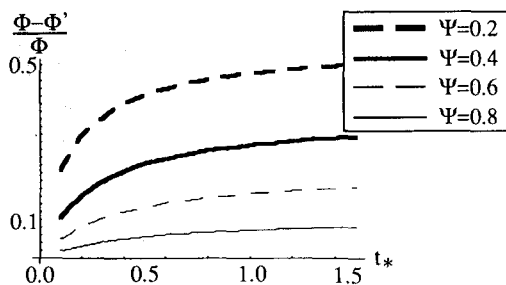


図-2 Φ をパラメータとした相対誤差と t_* の関係

3. 移流計算スキームの選択方法 以下の手順で移流項計算スキームの選択を行う。

- 1) 拡散シミュレーションにおいて許容される真値との相対誤差 $(\Phi - \Phi') / \Phi$ 、物理拡散係数 D 、代表拡散スケール B 、拡散計算時間 t から図-2を用いて Ψ の値を決定する。
- 2) 物理拡散係数 D 、パラメータ Ψ の値から許容できる数値拡散係数 K の値をもとめる。
- 3) 判定基準のための点 $G (\Delta x/B, K\Delta t / \Delta x^2)$ を図-1にプロットする。
- 4) 図-1上で点 G より下に位置するスキームであれば使用可能となる。

4. 選択方法の検証とモデル計算 選択方法の有効性を検討するため洞海湾をモデルとした1次元拡散シミュレーションを行い、各種スキームの精度の比較を行った²⁾。計算格子間隔は $\Delta x=250$ (m)、 $\Delta t=300$ (sec)を用いた。境界条件は、湾口においては拡散物質が流出するように与え、湾奥においては物質濃度flux=0となるように与えた。図-3では、湾口から9.75kmの地点から12.0kmの地点(湾奥)の間で合計 $3.257\text{m}^3/\text{s}$ の淡水供給があり、初期濃度に全地点で2.0を分散係数は全地点で 9.281 (m^2/s)を与え、 2.4×10^6 (sec)後の濃度分布を求めた。図-4では、湾口から9.75kmの地点から12.0kmの地点(湾奥)の間で合計 $65.14\text{m}^3/\text{s}$ の淡水供給があり、初期濃度に全地点で1.0を分散係数は全地点で 0.0116 (m^2/s)を与え、 1.04×10^6 (sec)後の濃度分布を求めた。図-3、図-4ともに上図が濃度分布を下図はその地点に対応するクーラン数を示している。なお流速はすべて湾奥から湾口への向きである。移流計算スキームには、Lax-Wendroff、6-point、QUICKおよび時間方向にAdams-Bashforth法、QUICKEST、Upwindを用いた。

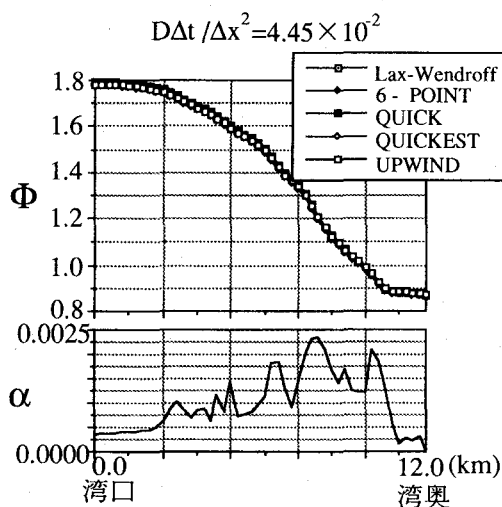


図-3 洞海湾拡散シミュレーションによる
 2.4×10^6 (sec) 後の物質濃度の予測図

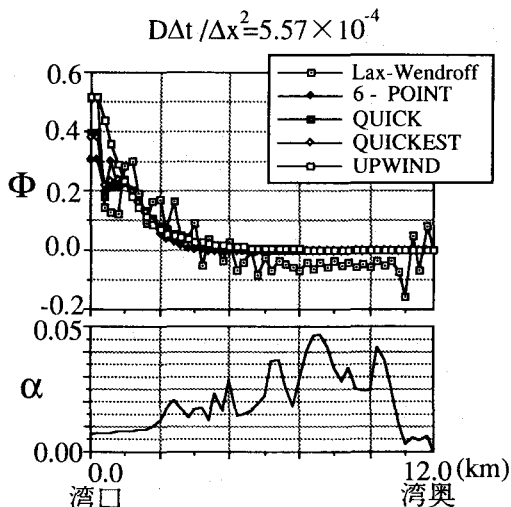


図-4 洞海湾拡散シミュレーションによる
 1.04×10^6 (sec) 後の物質濃度の予測図

図-3の場合において、前述の判定方法にしたがって判定基準点Gを求めると許容誤差0.1の場合、 $G(0.0028, 0.078)$ であった。ここでは代表長さスケールBに湾の長さ($B=12.0\text{km}$)を用いている。このGの値を図-1にプロットするとUpwind以外は使用可能であることが示される。しかしながら、計算結果はスキームの違いによる有意の差は生じていない。数値誤差が一番大きく現われやすいクーラン数が0.5のときを基準に判定基準が構築されているため、実際のクーラン数の値が0.5よりもはるかに小さい場合はこの判定基準は必要以上に厳しくなる。図-4における判定基準点Gは、許容誤差0.1の場合、 $G(0.0028, 0.0965)$ である。この場合もUpwind以外は使用可能であることが示される。しかしながらLax-Wendroffスキームを用いた場合、解に振動が生じている。これはダンピング誤差については判定基準をクリアしていても物理拡散が小さいため位相誤差が顕著に現れたものと思われる。位相誤差については別途考察中である。今後、さらに条件を変えてシミュレーションを行い、選択方法の有効性を検討したいと思っている。また、2次元の拡散シミュレーションにおいても選択方法の有効性を確かめる予定である。

<参考文献>

- 1) 吉村耕市郎, 小松利光, 朝位孝二: 拡散シミュレーションにおける移流計算スキームの選択方法について, 土木学会第48回年次学術講演会概要集第2部, PP380~381, 1993
- 2) 安達貴浩, 小松利光, 矢野真一郎, 岡田豊昭, 桃野武幸, 井戸垣敏, 永野雅巳: 閉鎖性内湾の水質改善予測, 平成3年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集, PP252~253, 1992