

一般曲線座標による開水路流れの数値計算

長崎大学工学部 学生員 ○森元賢哉 林田 孝昭

長崎大学海洋生産科学研究科 正員 薦田 廣章

1. はじめに

計算機の大容量化・高速化により、流体運動は実験的解析だけでなく数値計算による解析も可能となってきた。そこで、一例として台形堰を有する開水路を考え、その流況に関する数値計算を行った。計算手法としては差分法を用いており、基礎方程式は一般曲線座標を用いて展開している。また、乱流諸量を評価するために標準的な $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルを組み込んでいる。

2. 基礎方程式

<連続式>

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

< Navier-Stokes 運動方程式 >

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \} + g_i \quad (2)$$

<乱流運動エネルギー k の輸送方程式>

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t E_v - \varepsilon \quad (3)$$

<エネルギー散逸率 ε の輸送方程式>

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{C_1 \varepsilon \nu_t E_v}{k} - \frac{C_2 \varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

ここに、 $E_v = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ である。

上式において、 u_i は x 方向および y 方向の平均流速成分、 $\hat{p}$ は圧力密度比 ($\hat{p} = p + (2/3)k$)、 g_i は重力加速度成分および ν_t は渦動粘性係数 ($\nu_t = C_\mu k^2 \varepsilon^{-1}$) である。モデル定数としては、 $C_\mu = 0.09$ 、 $C_1 = 1.44$ 、 $C_2 = 1.92$ 、 $\sigma_k = 1.0$ 、 $\sigma_\varepsilon = 1.3$ を用いた。式(1)~(4)を一般曲線座標に変換し、Regular Grid を採用して数値計算を行った。なお、慣性項の差分に際しては非物理的振動を防ぐために3次精度のQUICKスキームを用いた。

3. 境界条件

(1) 自由表面における境界条件

自由表面における境界条件は、自由表面上の流体粒子は常に自由表面上に存在するという運動学上の条件、自由表面上の応力のつりあいによる力学上の条件および連続条件の3条件を与えた。一般曲線座標に変換した各条件を式(5)~(8)に示す。

①運動学上の境界条件

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial \xi} = v \quad (5)$$

②力学上の境界条件

$$\text{法線方向応力: } \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\text{接線方向応力: } \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $g_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$ 、 $g^{22} = J^{-2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right)$ である。

③連続条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

(2) k および ε の境界条件

乱流運動エネルギー k およびエネルギー散逸率 ε については、左端の流入面では橋津らの半理論式(9)¹⁾を与えた。また、底壁面では式(10)で与えた。

$$(\text{流入面}) \quad k = 4.78 u_*^2 \exp(-2y) \quad \varepsilon = 9.76 u_*^3 \exp(-3y) / \sqrt{y} \quad (9)$$

$$(\text{底壁面}) \quad k = u_*^2 / \sqrt{C_\mu} \quad \varepsilon = u_*^3 / \kappa y \quad (10)$$

なお、流出面および自由水面の境界条件は Neumann 型で与えた。

4. 時間積分

時間積分は、まず 1st ステップとして慣性項と粘性項の半分を用いて仮流速 $\mathbf{v}^{n+1/2}$ を求めた。そして、圧力の Poisson 式を Iteration 手法により解き、収束判定を行った。さらに、2nd ステップとして粘性項の半分と圧力項を用い真流速 $\mathbf{v}^{n+1}$ を求めた。この過程を式(11)~(13)に示す。

$$(\text{1st Step}) \quad \frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} \mathbf{H}^n - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{n-1} = \frac{\nabla^2 \mathbf{v}^n}{2\text{Re}} \quad (11)$$

$$(\text{Pressure Iteration}) \quad \nabla^2 \mathbf{p}^{n+1/2} = \frac{D^{n+1/2}}{\Delta t} \quad (12)$$

$$(\text{2nd Step}) \quad \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1/2}}{\Delta t} = -\nabla \mathbf{p}^{n+1/2} + \frac{\nabla^2 \mathbf{v}^{n+1}}{2\text{Re}} \quad (13)$$

5. 計算結果および結論

計算メッシュは(130,40)のグリッドとし、 $\text{Re}=20,000$ の流れを計算した。これによって得られた流速ベクトルを図-1に示す。また、実験値との比較を図-2に示す。



図-1 流速ベクトル

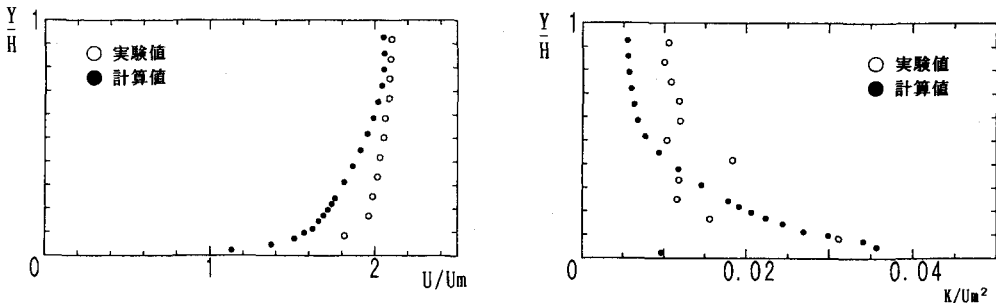


図-2 堰上の断面における計算値と実験値の比較

<参考文献>

1. 橋津・中川：自由表面を考慮した開水路乱流の数値計算手法—修正 $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルによる解法—, 京都大学防災研究所年報 第29号 B-2 pp1-27, 1986