

ストークス波と没水構造物の3次元非線形干渉解析法

九州大学工学部 学生員○木原康成 正会員 村上啓介
正会員 吉田明德 正会員 牛房幸光

1. ま え が き

ポテンシャル接続法(選点解法)は、従来の固有関数に関する積分演算を行う方法とは異なり、仮想境界面上に選点を配置し、その選点上で流体運動の連続条件を課することにより、隣合う領域のポテンシャルの1次関係式を導くものであり、理論式の展開とプログラミングは非常に簡潔になるという利点がある。この方法は3次元没水構造物と波との干渉問題に関しても適用可能で、線形問題においてその妥当性が確かめられている。本文では、3次元没水構造物とストークス波との非線形干渉問題に関してポテンシャル接続法の選点解法を用いた解析法を示し、主に2次のオーダーの解の特性について検討した結果について述べる。

2. 解析法の概略

図-1に示すように、一定水深 h の海域に長さ D 、幅 B 、没水深 $qh(0 < q < 1)$ の単一の没水水平版があり、これに対してストークス波(1次の振幅 ζ_0 、角周波数 σ)が入射する

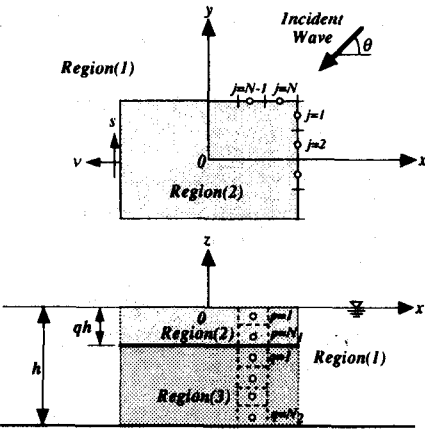


図-1 領域分割図と計算点

場合を考える。流体運動は非圧縮性、非粘性完全流体の無渦運動と仮定すると速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ は、ラプラス方程式を満足する。ここで、速度ポテンシャル Φ 、水面変動量 η 、常数 Q が微小パラメータ $\epsilon = k\zeta_0, k = 2\pi/L$ (L は波長) により、次のように展開できるものとする。

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{g}{k\sigma} \left\{ \epsilon \phi_1(x, y, z) e^{-i\sigma t} + \epsilon^2 (\phi_2^{(0)} + \phi_2^{(2)}(x, y, z) e^{-i2\sigma t}) + \dots \right\}$$

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{k} \left\{ \epsilon \eta_1(x, y) e^{-i\sigma t} + \epsilon^2 (\eta_2^{(0)} + \eta_2^{(2)}(x, y) e^{-i2\sigma t}) + \dots \right\} \quad (2)$$

$$Q = \frac{g}{k} \{ \epsilon Q_1 + \epsilon^2 Q_2 + \dots \} \quad (3)$$

流体域は、没水水平版により自由水面を有する領域(1)、(2)と自由表面を有しない領域(3)に分割される。各領域で速度ポテンシャル Φ が満たすべきラプラス方程式と、自由表面での境界条件を $z=0$ でテーラー展開して得られる1次と2次の水面の境界条件式に、式(1)、(2)、(3)を代入することにより、各オーダーの速度ポテンシャルに関する境界値問題が誘導される。ここで、2次のオーダーのポテンシャル関数のうち $\phi_2^{(0)}$ は波力あるいは水面形の算定においては3次のオーダーに寄与する量であり、ここでは主に $\phi_2^{(2)}$ について述べる。 $\phi_2^{(2)}$ は、ラプラス方程式を満足する関数であり、領域(1)、(2)では、静水面での非同次境界条件式を満足する。そこで、領域(1)、(2)において、2次のポテンシャル関数 $\phi_2^{(2)}$ が次式で表せるものとする。

$$\phi_{21}^{(2)} = \phi_{21}(x, y, z) + \phi_{2L1}(x, y, z) + \phi_{2F1}(x, y, z) \quad (4)$$

$$\phi_{22}^{(2)} = \phi_{2L2}(x, y, z) + \phi_{2F2}(x, y, z) \quad (5)$$

上式中で、 ϕ_{21} は2次の入射波成分を表し、 ϕ_{2L1}, ϕ_{2L2} は領域(1)、(2)での非同次境界条件を満足するラプラス方程式の特解、 ϕ_{2F1}, ϕ_{2F2} は同次境界条件を満足する一般解を表す。本研究では、領域(1)における ϕ_{2L1}, ϕ_{2F1} が次式で表せるものと仮定する。

$$\phi_{2L1}(x, y, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \gamma_{pq} f_{pq}(x, y) \frac{\cos(k_p + k_q)(z+h)}{\cos(k_p + k_q)h} \quad (6)$$

$$\phi_{2F1}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2F1}^{(n)}(x, y) \frac{\cos k_n^{(2)}(z+h)}{\cos k_n^{(2)}h} \quad (7)$$

ここで、 k_n および $k_n^{(2)}$ は、それぞれ分散関係式 $\sigma^2/g = -k_n h \tan k_n h, (\sigma^{(2)})^2/g = -k_n^{(2)} h \tan k_n^{(2)} h$ の根で与えられる。また、 $\varphi_{2F1}^{(n)}$ はポテンシャル関数の平面分布を表す未知関数で、 γ_{pq}, f_{pq} は1次のオーダーの解より算定される関数で次式で与えられる。

$$(1) \quad \gamma_{pq} = -\frac{i}{k} \frac{1}{(k_p + k_q) \tan(k_p + k_q)h + 4l} \quad (8)$$

$$f_{pq}(x, y) = \frac{\partial \varphi_{11}^{(p)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{11}^{(q)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{11}^{(p)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{11}^{(q)}}{\partial y} + \frac{1}{2} (3\Gamma^2 + k_0^2) \varphi_{11}^{(p)} \varphi_{11}^{(q)} \quad (9)$$

次に、式(7)中のポテンシャル関数 $\varphi_{2F1}^{(n)}$ の平面分布がグリーン公式を用いて次式で表せるものとする。

$$\varphi_{2F1}^{(n)}(X_i) = \alpha_1^{(n)} \oint_C \left\{ \varphi_{2F1}^{(n)}(X_j) \frac{\partial}{\partial \nu} G_n^{(2)}(k_n r_{ij}) - G_n^{(2)}(k_n r_{ij}) \frac{\partial}{\partial \nu} \varphi_{2F1}^{(n)}(X_j) \right\} ds \quad (10)$$

ここで、 X_i が境界上の場合には $\alpha = -i/2$ 、 X_i が領域内の場合には $\alpha = -i/4$ 、 $G_n^{(2)}(k_n r)$ は $n=0$ の場合には $H_0^{(1)}(k_0 r)$ 、 $n \neq 0$ の場合には $K_0(k_n r)$ で表される。なお、領域(2)の ϕ_{2F2} 、 ϕ_{2L2} および $\varphi_{2F2}^{(n)}$ についても同様に表すものとする。本解析法では、ポテンシャル関数とその法線方向微分値の1次関係式を導く際にポテンシャル接続法の選点解法を適用するが、具体的な数値計算法に関しては1次のオーダーの場合¹⁾と同様であるので、ここでは省略する。

3. 結果と考察

計算は、 $B/h = D/h = 2$ 、 $q = 0.5$ の没水水平版を対象に $kh = 1.0$ の場合について行い、選点は、水面から水底まで等間隔に分割した要素の中心に配置するものとした。また、固有関数展開した1次と2次のポテンシャル関数の打ち切り項数を領域(1)では n_1, n_2 、領域(2)では m_1, m_2 、領域(3)では s_1, s_2 で書き表すものとし、拘束波の算定に用いる1次解の級数項 p, q に関する打ち切り項数を領域(1)、(2)においてそれぞれ $\bar{n}, \bar{m}$ で書き表す。図-2は、 ϕ_{2L1} の算定に用いる1次解の項数 $\bar{n}$ と $|\varphi_{2F1}^{(0)}|$ との関係を示したものである。この図より、 $n_2 + 1$ が12, 20, 28の場合に、 $\bar{n} + 1$ を6, 10, 14よりも大きく取ると妥当な解が得られなくなることがわかる。このことは、2次の自由波の打ち切り項数 n_2 が $\bar{n}$ とは無関係に取ることができないことを示しており、この結果は2次元問題の場合²⁾と同様である。図-3は、 $\bar{n} + 1$ を1, 8, 14に取った場合の $|\varphi_{2F1}^{(n)}|$ の変動を示したものである。この場合も2次元問題の場合と同様に、項数が $2\bar{n} + 1$

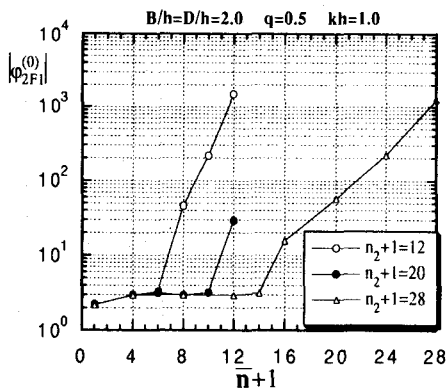


図-2 n_2 と $\bar{n} + 1$ による解の変動

を越えるところの係数値はほぼ0となり、 n_2 を必要以上に多くとっても解の精度の向上には寄与しないことがわかる。図-4は、1次と2次のオーダーのポテンシャル関数 $|\phi_{11}|, |\phi_{2L} + \phi_{2F}|$ と打ち切り項数 n_2, m_2 との関係を示したものである。ここで、1次の打ち切り項数 n_1, m_1 は n_2, m_2 と等しく取り、 $n_2 = 2\bar{n} + 1, m_2 = 2\bar{m} + 1$ として計算を行った。この図より、2次のオーダーのポテンシャル関数は打ち切り項数の増加にともない振動しながら収束していることがわかる。また、2次のオーダーの打ち切り項数は $n_2 + 1 = 20$ 程度にとれば十分収束した解が得られることがわかる。

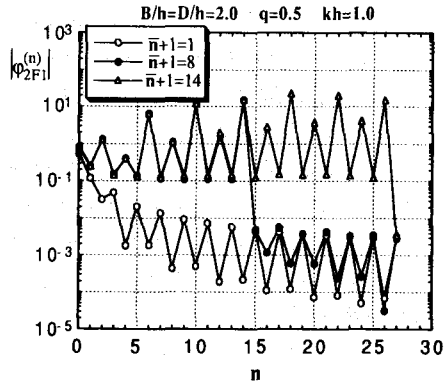


図-3 $\bar{n} + 1$ による $\varphi_{2F1}^{(n)}$ の変動

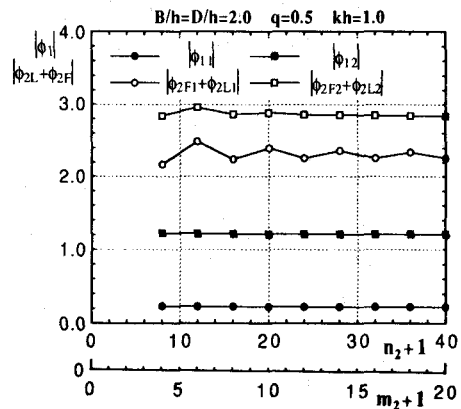


図-4 1次と2次の解の収束

4. あとがき

ポテンシャル接続法の選点解法を用いた3次元没水構造物とストークス波の非線形干渉解析法を示し2次の解について検討を行った。その結果、2次の解の特性および数値計算上の留意点は2次元問題の場合とほぼ同じであることがわかった。

参考文献

- 1) 吉田ら:海岸工学論文集 第39巻 pp756~760, 1992
- 2) 吉田ら:土木学会論文集 No434/II - 16, pp57~66, 1991