

緩勾配方程式に適用できる有限解析法

長崎大学工学部 学生員 ○ 滝上 邦彦
 長崎大学工学部 正 員 富樫 宏由
 長崎大学工学部 正 員 余 錫平

1. 序言

緩勾配方程式は、屈折・回折を含んだ沿岸波浪場の基礎方程式として知られ、その有用性が多くの研究によって確かめられた。一方、楕円型の緩勾配方程式に基づく波浪場数値計算に関しては、従来有限要素法を用いる。しかし有限要素法では、計算結果の精度を高めるために計算時間の増大が避けられない。そこで本研究では、有限解析法という高精度数値計算方法の緩勾配方程式への適用を試みる。

2. 有限解析法の概略

Berkhoff (1972)によって提案された緩勾配方程式は次式である。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + k^2 CC_g \eta = 0 \quad (1)$$

ここに、 k は波数、 C は波速、 C_g は群速度、 η は複素数の自由水面振幅である。式(1)において $\phi = \sqrt{CC_g} \eta$ とすると、次の ϕ に関する近似方程式が得られる (Radder, 1979)。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2)$$

有限解析法とは、解析不能な全計算領域を規則的な要素に分割し、それぞれの要素において基礎方程式を近似することと境界条件を未知関数の節点値で表示することによって、理論解析を可能にし、局所の解析解つまり有限解析解を得る方法である (Chwang & Chen, 1987)。有限解析解より、要素内部点での未知関数の値を境界節点値で表され、即ち、任意の節点での未知関数の値はその点を囲む節点での値で表される。すべての節点に対してこのように、そこでの未知関数値を周囲節点値によって表すと、全節点での未知関数値に対する代数方程式が得られ、その解が基礎方程式の全領域における解の近似できる。

図1に代表的な要素を示している。この要素において、基礎方程式(2)が当然成立する。ただしこの場合に、 Δx および Δy が波長より微小であるため、 k はO点での値で近似できる。一方、要素の境界条件を次のような形式とし、

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_N(x) \quad \text{at } y = \Delta y; & \phi &= \phi_S(x) \quad \text{at } y = -\Delta y; \\ \phi &= \phi_E(y) \quad \text{at } x = \Delta x; & \phi &= \phi_W(y) \quad \text{at } x = -\Delta x \end{aligned} \quad (3)$$

ϕ の有限解析解を、 $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ とする。ただし、 ϕ_1 は $y = \Delta y$ での非同次境界条件による ϕ の解、つまり次の境界条件での ϕ の解であり、

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_N(x) \quad \text{at } y = \Delta y; & \phi &= 0 \quad \text{at } y = -\Delta y; \\ \phi &= 0 \quad \text{at } x = \Delta x; & \phi &= 0 \quad \text{at } x = -\Delta x \end{aligned} \quad (4)$$

次式で表わされる。

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{-\Delta x}^{\Delta x} \phi_N(x) \sin \lambda_n (x + \Delta x) dx}{\Delta x \sinh 2\sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \Delta y} \sinh \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} (y + \Delta y) \sin \lambda_n (x + \Delta x) \quad (5)$$

ここに、 $\lambda_n = n\pi/2\Delta x$ 。また、 ϕ_2 、 ϕ_3 および ϕ_4 は、それぞれ $y = -\Delta y$ 、 $x = \Delta x$ および $x = -\Delta x$ での非同次境界条件による ϕ の解であり、それぞれに対して式(5)に類似した表示式が得られる。境界関数 $\phi_N(x)$ が次のように仮定できるので、

$$\phi_N(x) = \frac{\phi_{NE} + \phi_{NW}}{2} + \frac{\phi_{NE} - \phi_{NW}}{2} \sin \lambda_1 x + \frac{2\phi_{NC} - \phi_{NE} - \phi_{NW}}{2} \cos \lambda_1 x \quad (6)$$

式(5)よりO点での ϕ_1 を次のように得られる。

$$\phi_{O1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi \cosh \sqrt{\lambda_{2m-1}^2 - k^2} \Delta y} + \frac{2\phi_{NC} - \phi_{NE} - \phi_{NW}}{4 \cosh \sqrt{\lambda_1^2 - k^2} \Delta y} \quad (7)$$

また、同様にして ϕ_{O2} 、 ϕ_{O3} および ϕ_{O4} に関する式も求められる。結局、 ϕ_O は次のように導かれる。

$$\phi_O = C_1(\phi_{NC} + \phi_{SC}) + C_2(\phi_{NE} + \phi_{NW} + \phi_{SW} + \phi_{SE}) + C_3(\phi_{EC} + \phi_{WC}) \quad (8)$$

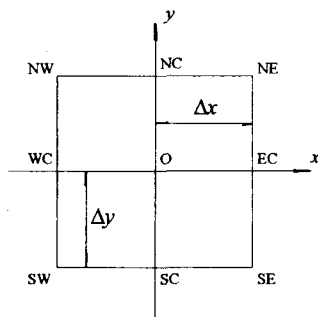


図1 代表的な要素の定義図

ここに、係数 C_1, C_2 , および C_3 は次式で示される。

$$C_1 = \frac{1}{2 \cosh \sqrt{\lambda_1^2 - k^2} \Delta y} \quad (9)$$

$$C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} \left\{ \frac{1}{\cosh \sqrt{\lambda_{2m-1}^2 - k^2} \Delta y} + \frac{1}{\cosh \sqrt{\mu_{2m-1}^2 - k^2} \Delta x} \right\} - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \quad (10)$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \cosh \sqrt{\mu_1^2 - k^2} \Delta x} \quad (11)$$

ただし、 $\mu_n = n\pi/2\Delta y$ 。

特定の場合として、 $\Delta x = \Delta y = \Delta$ を考えることとする。また、 $k\Delta$ が微小量であるため、式(9), (10) および (11) は次のように近似できる。

$$C_1 = C_3 = 0.1992684 + 0.0581741(k\Delta)^2; \quad C_2 = 0.0507316 + 0.1732712(k\Delta)^2 \quad (12)$$

さらに、図1に示している要素において、 $x = -\Delta x$ は不透過境界である場合あるいは $x = -\Delta x$ と $y = -\Delta y$ 共に不透過境界である場合に、それぞれ次の有限解析解が得られる。

$$\phi_O = C_1'(\phi_{NC} + \phi_{SC}) + C_2'(\phi_{NE} + \phi_{SE}) + C_3'\phi_{EC} \quad (13)$$

$$C_1' = 0; \quad C_2' = 0.2164586 + 0.34223078(k\Delta)^2; \quad C_3' = 0.3917707 + 0.5081961(k\Delta)^2 \quad (14)$$

$$\phi_O = C_1''\phi_{NC} + C_2''\phi_{NE} + C_3''\phi_{EC} \quad (15)$$

$$C_1'' = C_3'' = 0; \quad C_2'' = 0.9999999 + 1.7319610(k\Delta)^2 \quad (16)$$

3. 応用の例

以上の有限解析法を図2に示しているような想定した波浪場の計算に適用する。波浪場の $x=0, y=0$ および $y=400\text{m}$ にある境界は不透過境界であり、 $x=400\text{m}$ にある境界では強制水位変動を与える。波浪場の一樣水深部の水深は 10m であり、半径 100m の半球形浅瀬頂点での最小水深は 2m である。強制水位変動の周期は 12s である。計算において $\Delta x = \Delta y = 400/31$ と設定した。有限解析法で得られた線形方程式をガウス消去法で解き、 ϕ の解を求めた。 ϕ と η との関係から、図3に示しているような波高の分布が得られた。

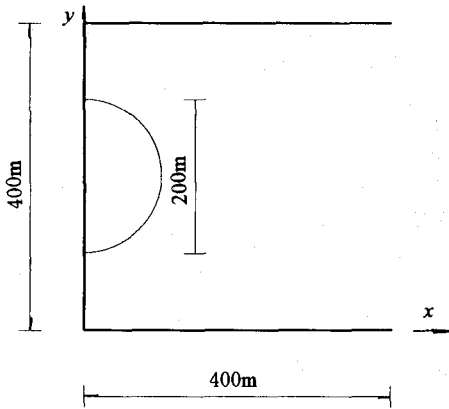


図2 波浪場の定義図

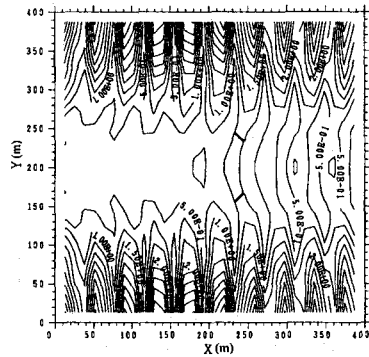


図3 計算波高分布

4. 結論

有限解析法の緩勾配方程式への適用を試みた。正方形の要素に対して有限解析の結果を数値化し、想定した波浪場の計算に適用した。

参考文献

- Berkhoff, J.C.W. (1972): "Computation of combined refraction-diffraction", *Proc. 13th ICCE*, 471-490.
 Chwang, A.T. & Chen, H.-C. (1987): "Optimal finite element difference method for potential flows", *J. Eng. Mech.*, 113(11), 1759-1773.
 Radder, A.C. (1979): "On the parabolic equation method of water-wave propagation", *J. Fluid Mech.*, 95, 159-176.