数値逆ラプラス変換を用いたTimoshenko梁の衝撃応答解析

長崎大学　工学部　学生員　○揚野一隆
長崎大学　工学部　正　員　松田　浩
長崎大学　工学部　正　員　崎山　毅
長崎大学　工学部　正　員　森田千尋
長崎大学　工学部　学生員　川添和美

1. まえがき

骨組構造物の衝撃応答解析は、モード法、差分法、ラプラス変換を用いる方法等の解法を用いて行われている。ラプラス変換を用いる方法では、実際の過渡応答を求めるために、逆ラプラス変換を行って得られた結果を時間領域に戻す必要がある。足立ら[1]、岩崎ら[2]は、FFTを用いて数値逆ラプラス変換を行っている。本研究では、構造物の支配方程式を時間に関してラプラス変換した後、離散的近似解法に基づく解析手法を用いてラプラス変換領域での離散解を求め、それを数値的に逆変換することにより時刻歴応答解析を行った。数値逆ラプラス変換には、細野[3]によって開発されたFILT(Fast Inversion of Laplace Transform)を用いた。

2. ラプラス変換・逆変換

関数 $f(t)$ を t についてラプラス変換した関数を $F(s)$ とすると、変換と逆変換は次のように表わされる。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{st}ds \tag{1}$$

ただし、 $\gamma > \gamma_0$ （γ_0 :収束座標）, $i = \sqrt{-1}$

ここで、像関数 $F(s)$ は $Re(s) > \gamma_0$ で正則であるとし、γ_0 は既知である。尚、この解法の詳細については、文献３)を参照されたい。

3. Timoshenko梁の運動方程式および離散的一般解

せん断変形と回転慣性を考慮した梁(Timoshenko梁)の運動方程式および時間 t に関してラプラス変換された運動方程式は次のようになる。

〈運動方程式〉

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p(x,t) \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q - \rho I\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{M}{EI} \tag{2-3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta + \frac{Q}{\kappa GA} \tag{2-4}$$

〈ラプラス変換された運動方程式〉

$$\frac{d\overline{Q}}{dx} = \rho As^2\overline{y} - \overline{p}(x,s) \tag{3-1}$$

$$\frac{d\overline{M}}{dx} = \overline{Q} - \rho Is^2\overline{\theta} \tag{3-2}$$

$$\frac{d\overline{\theta}}{dx} = -\frac{\overline{M}}{EI} \tag{3-3}$$

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \overline{\theta} + \frac{\overline{Q}}{\kappa GA} \tag{3-4}$$

ここに、A :断面積、I :断面２次モーメント、E :弾性係数、G :せん断弾性係数、ρ :単位体積質量、
κ :せん断補正係数、$p(x,t)$:衝撃荷重

式（３－１）～（３－４）において以下に示す無次元量を導入し、領域［０, η］での積分方程式に変換する。

$$X_1 = -\frac{L^2}{EI_0}\overline{Q} \quad , \quad X_2 = -\frac{L}{EI_0}\overline{M} \quad , \quad X_3 = \overline{\theta} \quad , \quad X_4 = \frac{\overline{y}}{L} \quad , \quad \eta = \frac{x}{L} \tag{4}$$

次に積分方程式の近似解法を応用すると、ラプラス変換領域での離散的一般解は次式のようになる。

$$X_{pi} = \sum_{d=1}^{4} a_{pid}X_{d0} + q_{pi} \tag{5}$$

以上から求められる X_{pi} をFILTを用いて数値逆ラプラス変換することにより、時刻歴応答が計算できる。

4. 解析結果

本解析法によるTimoshenko梁の衝撃応答解析の結果を示す。まず、本解析法の解析精度を明らかにするために、両端単純支持されたTimoshenko梁(平均半径 a ,厚さ h の中空円断面)がスパン中央点に衝撃荷重を受ける問題(Fig. 1)に関して、文献 4)との比較を行った結果をFig. 2 に示す。次に、種々の境界条件を有する場合の衝撃応答解析の結果をFig. 3 に示す。最後に、Fig. 4 に示す変断面Timoshenko梁の衝撃応答解析の結果をFig. 5 に示す。

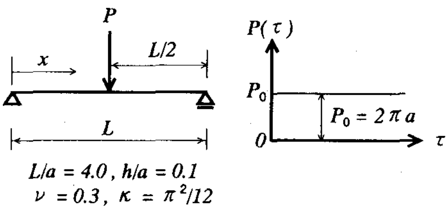

Fig. 1　梁の横衝撃問題

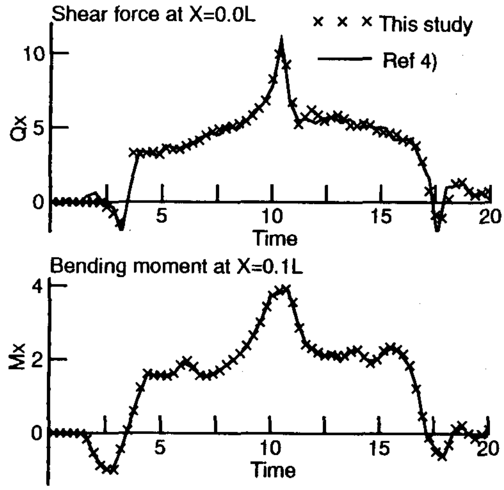

Fig. 2　本解析法と文献 4)との解の比較

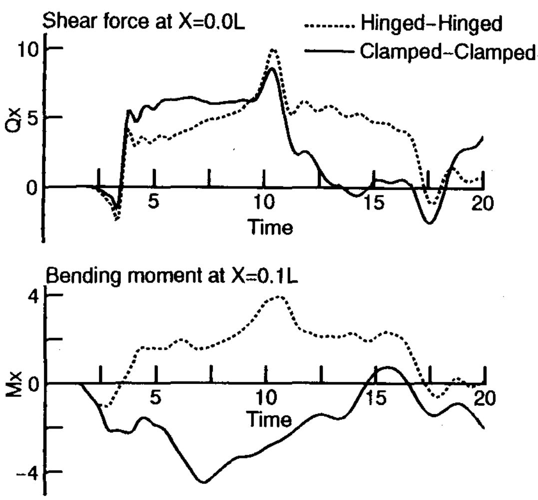

Fig. 3　種々の境界条件による衝撃応答解析

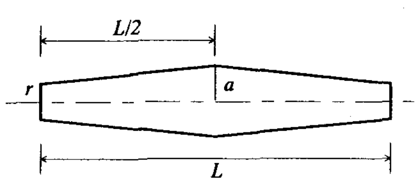

Fig. 4　変断面Timoshenko梁

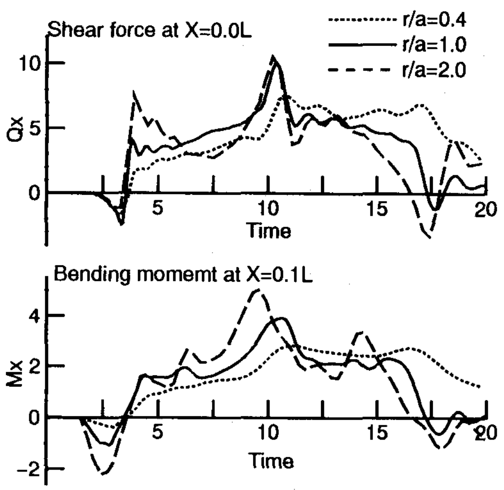

Fig. 5　変断面Timoshenko梁の衝撃応答解析

[参考文献]

1)足立忠晴・波多野啓二・宇治橋貞幸・松本浩之：数値ラプラス変換を利用したマトリックス法による骨組構造物の衝撃応答解析, 機会学会論文集(A編), 56巻, 5247号, pp. 237-243, 1990

2)岩崎英治・林正・須沢正人：FFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換,土木学会48回年講I-671, 1993

3)細野敏夫：逆ラプラス変換用高速アルゴリズムFILT, bit, 15(1983), pp. 1158-1167

4)三上隆：選点法による構造物の動的問題の解析に関する研究, pp.218-227, (北大学位論文)