

不規則な支点変動を受ける弾性ばりの非定常応答解析

長崎大学工学部 ○学生員 久田 昌也

長崎大学工学部 正員 岡林 隆敏

大日本コンサルタント(株) 正員 川神 雅秀

1. はじめに

長大橋梁の地震応答を考える場合、地震波の伝播速度を考えて、各支点に異なる地震波形を作用させる必要がある。本文は、このようなモデルとして、単純ばりを考え、各支点に時間遅れのある不規則外力が作用した場合、はりの変位および曲げモーメントの分散応答を解析する手法を提案するものである。地震外力は金井・田治見・Penzien⁽¹⁾モデルを用いて、これを形状関数で成形し、非定常確率過程と考えている。この場合の、定常応答および非定常応答解析の結果について報告する。

2. 基礎方程式

図-1のような支点に不規則な外力を受けて水平振動する弾性ばりを考える。x点におけるはりの変位は次式で与えられる。

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) q_k(t) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) f_i(t) \quad (1)$$

ここで、はりの基準座標の方程式は次式となる。

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\sum_{i=1}^2 G_{ki} \ddot{f}_i(t) \quad (2)$$

ここに $G_{ki} = 1/M_k \int_0^L m \phi_k(x) g_i(x) dx$ なる支点加速度の

影響係数であり、 $\phi_k(x)$: 振動モード、 $q_k(t)$: 基準座標、

$g_i(x)$: 左右端の変位のグリーン関数、 $f_i(t)$: i点の地盤の水平変位である。ここで $q_k(t)$ を(3)式の状態変数で定義すれば、

(1)式は(4)式の構造系の状態方程式として表すことができる。

$$\mathbf{Y}(t) = [q_1(t) \cdots q_n(t) \quad \dot{q}_1(t) \cdots \dot{q}_n(t)]^T \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}_Y(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}_Y \ddot{\mathbf{f}}(t_0), \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(t_0) \quad (4)$$

3. 地震力のモデル化

地震モデルは、金井・田治見・Crough-Penzein型⁽¹⁾のパワースペクトル密度を持つものとして、(5)式を考える。

$$S_g(\omega) = \omega^4 (\omega_g^4 + 4h_g^2 \omega_g^2 \omega^2) S_0 / ((\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4h_g^2 \omega_g^2 \omega^2) \quad (5)$$

ここで、このパワースペクトル密度は、荷重系に白色雑音が入力したものとしてモデル化する。 $\mathbf{Z}_1(t)$ を(6)式の状態変数で定義すれば、荷重系の状態方程式は(7)式で表すことができる。

$$\mathbf{Z}_1(t) = [Z_{11} \quad \dot{Z}_{11} \quad Z_{21} \quad \dot{Z}_{21}]^T \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}_1(t) = \mathbf{A}_{Z_1}(t)\mathbf{Z}_1(t) + \mathbf{B}_{Z_1} n_1(t) \quad (7)$$

(5)式は平均値0の正規性白色雑音 $n_1(t)$ を入力とするフィルターにより構成できる。また支点に作用する地盤加速度は、 $\ddot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{e}(t)\mathbf{C}_1^T(t)\mathbf{Z}_1(t)$ となる。ここに、 $\mathbf{e}(t)$ は形状関数である。

$$\mathbf{C}_1^T = [-\omega_p^2 \quad -2h_p\omega_p \quad \omega_g^2 \quad 2h_g\omega_g] \quad (8)$$

4. 不規則応答解析

ここで、改めて構造-荷重系の状態変数を(9)式で表せば、状態方程式は(10)式となる。

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{Y}(t) \quad \mathbf{Z}_1(t) \quad \mathbf{Z}_2(t)]^T \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_X(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_{X1} n(t) + \mathbf{B}_{X2} n(t-\tau) \quad (10)$$

次に応答の分散、共分散について考える。変位、曲げモーメントの応答式(11),(12)式に必要な共

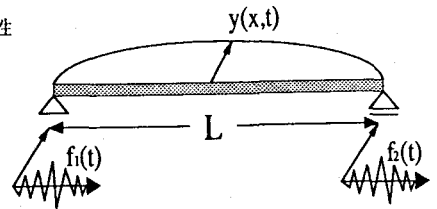


図-1 地盤のモデル化

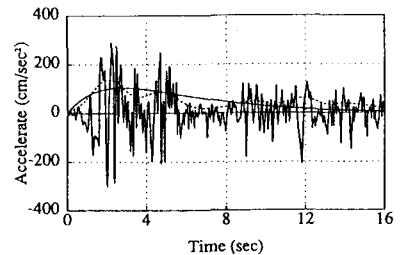


図-2 時間歴応答

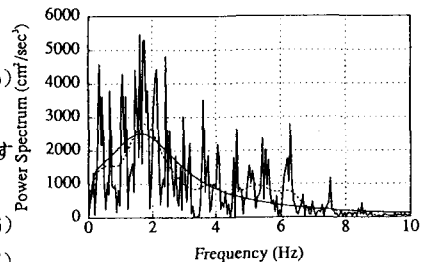


図-3 パワースペクトル密度

散は、共分散行列 $R_x(t)$ の要素である $R_v(t)$ の要素として得ることができる。

$$E[u^2(x, t)] = \phi_1^T E[\mathbf{q}(t) \mathbf{q}(t)^T] \phi_1 \quad (11)$$

$$E[M^2(x, t)] = \phi_2^T E[\mathbf{q}(t) \mathbf{q}(t)^T] \phi_2 \quad (12)$$

$$R_x(t) = \begin{bmatrix} R_v(t) & R_{vz}(t) \\ R_{zv}(t) & R_z(t) \end{bmatrix}$$

$$R_v(t) = \begin{bmatrix} E[\mathbf{q}(t) \mathbf{q}(t)^T] & E[\mathbf{q}(t) \dot{\mathbf{q}}(t)^T] \\ E[\dot{\mathbf{q}}(t) \mathbf{q}(t)^T] & E[\dot{\mathbf{q}}(t) \dot{\mathbf{q}}(t)^T] \end{bmatrix}$$

この $R_x(t)$ に関する共分散方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{R}_x(t) = & A_x(t) R_x(t) + R_x(t) A_x(t)^T + B_1 Q B_1^T \\ & + B_2 Q B_2^T + \Phi(t, t-\tau) B_1 Q B_2^T + B_2 Q B_1^T \Phi(t, t-\tau) \end{aligned} \quad (13)$$

となり、これは外力の非定常性および初期条件からの過

渡的变化の非定常応答を表現する方程式である。

ここで $\Phi(t, t-\tau)$ は (14) 式で定義される状態遷移行列である。

$$\Phi(t, t_0) = A_x(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (14)$$

また、外力を定常確率過程でモデル化した定常応答を考えると共分散行列 $R_x(t)$ の時間的变化は $R_x(t) = O$ となり、状態遷移行列は $\Phi(\tau)$ の時間遅れ τ のみの関数の (15) 式で表され、定常応答の場合の共分散方程式は連立方程式を解くことにより求めることができる。

$$\begin{aligned} A_x(t) R_x(t) + R_x(t) A_x(t)^T + B_1 Q B_1^T \\ + B_2 Q B_2^T + \Phi(\tau) B_1 Q B_2^T + B_2 Q B_1^T \Phi(\tau) = O \end{aligned} \quad (15)$$

5. 数値解析と考察

対象とした構造物は単純支持の弾性ばりである。4 次までの振動を考え、それぞれ振動数を $f_n=1, 4, 9, 16$ (Hz)、減衰定数を $h_n=0.02$ とし、支間中点についての数値解析を行った。入力地震波としては図-2に示す E1-Centro 地震波形 (N-S 成分) を使用し、図-3はこの波形のパワースペクトル密度曲線である。計算に使用する (8) 式の定数は非線形最小二乗法により求めた。図-3の実線はこの場合のパワースペクトル密度である。図-4は左右各支点に同時に同一の地震外力が作用した場合の、直接応答計算による支間中点の変位の応答である。図-5は支点に $\tau=0.5$ 秒遅れて地震外力が作用した場合の結果である。時間遅れがない場合の変位応答に比べて、時間遅れが $\tau=0.5$ 秒の時の変位応答は、図のように低下することが分かる。図-6は共分散方程式において、定常モデルを適用し、各支点に作用する外力を $\tau=0 \sim 1$ (秒) 変化させた時の支間中点の変位応答の標準偏差を示したものである。横軸は時間遅れで、縦軸は不規則応答の最大応答で基準化した応答を示した。

6. まとめ

ここでは、支点に不規則な外力を受ける弾性ばりの定常応答解析、および非定常応答解析の手法を提案した。定常応答解析では、直接時間応答解析結果と良い傾向の一致が得られた。定常応答解析による曲げモーメントの応答結果、および非定常応答解析による変位と曲げモーメントの応答解析結果については、講演時に報告する。

【参考文献】 1) Crough, R. W. and J. Penzien: Dynamics of structures, McGraw-Hill, New York, 1960

2) 岡林：土木学会論文報告集第286号

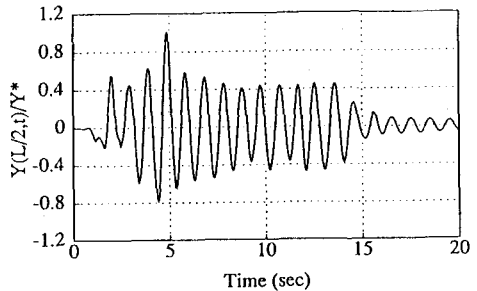


図-4 時間歴応答 ($\tau=0$)

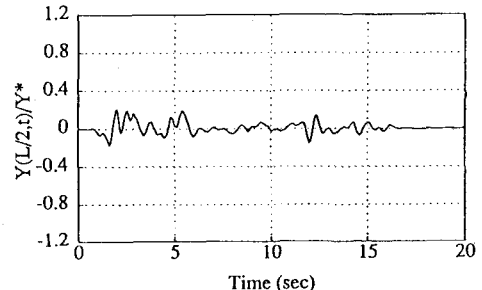


図-5 時間歴応答 ($\tau=0.5$)

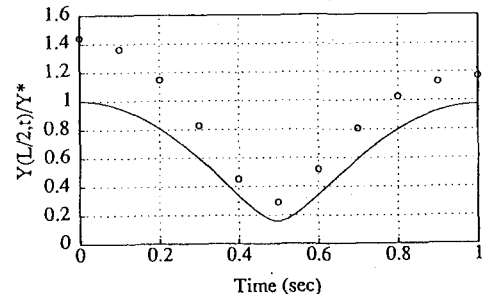


図-6 標準偏差応答と最大応答