

Green関数を用いた平板の自由振動解析

長崎大学 大学院 ○学生員 萩野 毅
 長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅
 長崎大学 工学部 正 員 森田千尋
 長崎大学 大学院 学生員 西村一朗

1. まえがき

本研究は、数値的に求められたGreen関数に基づき、種々の境界条件を有する矩形板、斜板、直交異方性板の自由振動解析を行うものである。離散化Green関数は、著者らの一部が既に提示した基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより得られる平板の離散的な一般解法¹⁾によって求められる。

2. 運動方程式の境界積分方程式への変換

平板の振動に関する運動方程式と基本解に対する基礎微分方程式を示す。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = C_1 \quad (1.1) \quad \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = C_2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (1.2) \quad \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} = \bar{Q}_x \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (1.3) \quad \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} = \bar{Q}_y \quad (2.3)$$

$$M_x = D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1.4) \quad \bar{M}_x = \bar{D}_{11} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + \bar{D}_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + \bar{D}_{16} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$M_y = D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1.5) \quad \bar{M}_y = \bar{D}_{12} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + \bar{D}_{22} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + \bar{D}_{26} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$M_{xy} = D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1.6) \quad \bar{M}_{xy} = \bar{D}_{16} \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} + \bar{D}_{26} \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} + \bar{D}_{66} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

$$Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1.7) \quad \bar{Q}_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) \quad (2.7)$$

$$Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (1.8) \quad \bar{Q}_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{\theta}_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\theta}_x \right) \quad (2.8)$$

ここに、 $\kappa=5/6$ ：せん断修正係数

(i) 斜板の場合、 $C_1 = -\rho h_0 \omega^2 w \cos \theta$ 、 $C_2 = -P \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \cos \theta$ 、 $D_{ij} = D_0 a_{ij}$ 、 $A_{ij} = G \cdot t_s \cdot a_{ij}$

θ ：斜角、 ρh_0 ：単位面積の質量、 P ：単位集中荷重、 $\delta(x-x_0), \delta(y-y_0)$ ：Diracのデルタ関数、 h_0 ：基準板厚

$D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]$ ：基準板剛度、 E ：弾性係数、 ν ：ポアソン比、 G ：せん断弾性係数、 $t_s = \kappa h_0$

$$a_{11} = a_{22} = 1/\cos^3 \theta$$

$$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = -\sin \theta / \cos^3 \theta$$

$$a_{44} = a_{55} = 1/\cos \theta$$

$$a_{12} = a_{21} = (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) / \cos^3 \theta$$

$$a_{33} = (1 + \sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta) / 2 \cos^3 \theta$$

$$a_{45} = a_{54} = -\sin \theta / \cos \theta$$

(ii) 矩形板の場合、斜板の $\theta = 0^\circ$ の場合に相当する。

(iii) 直交異方性板の場合、 $C_1 = \rho h \omega^2 w$ 、 $C_2 = -P \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$ 、 $D_{ij} = \bar{Q}_{ij}$ ($i, j=1, 2, 6$)、 $A_{ij} = \bar{Q}_{ij}$ ($i, j=4, 5$)

$\bar{Q}_{ij}$ ($i, j=1, 2, 6$)：任意方向の弾性係数、 $\bar{Q}_{ij}$ ($i, j=4, 5$)：任意方向のせん断弾性係数

ここで、式(2.1)を基に、式(1.1~8)を用いて整理し、境界条件を考慮のうえ次の無次元量および諸量

$$\lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}, \quad \eta = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{b} \quad \text{および} \quad F(\eta, \zeta) = \frac{b}{a} \cdot \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

を導入し数値積分を適用すると、いずれの場合も式(3)のようになる。

$$w(\eta_0, \zeta_0) = \int_0^1 \int_0^1 F(\eta, \zeta) \lambda^4 w(\eta, \zeta) \bar{w}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (3)$$

なお $\bar{w}$ は単位荷重が (η_0, ξ_0) に作用した場合の全体における平板のたわみ、すなわちGreen関数を表す。

3. 平板の基礎微分方程式およびその離散解

Green関数は平板の基礎微分方程式(2. 1~8)の離散的な一般解により求めることができる。まず基礎微分方程式を面積分し積分方程式に変換する。次に等間隔の数値積分法の応用により、その積分方程式を離散表示すれば無次元化された断面力および変形の主要点 X_{pij} に関する連立方程式が得られる。一方、任意の主要点における諸量 X_{pij} は境界従属点における諸量で表されることになり、

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left\{ \sum_{f=0}^i a_{1pijfd} \cdot X_{rf0} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} \cdot X_{s0g} \right\} + q_{pij} \tag{4}$$

となる。これによって X_{pij} の離散化Green関数が求まり、この結果をたわみ $\bar{w}$ とする。なお式(4)の導入過程については、文献 1)を参照されたい。

4. 数値解析結果

数値解析例として、境界条件が四辺固定の平板について解析を行った。Fig.1 に矩形板、Fig.2 に斜板 (斜角 $\theta=30^\circ$)、Fig.3 に直交異方性板 (弾性係数比 $E_L/E_T=10$) の本解析法によって得られる固有振動数の収束性と、他解析法による解析結果との比較を示す。なお、矩形板における比較解はClassen²⁾、斜板はDurvasula²⁾、直交異方性板はHearmon³⁾の解析結果によるものである。また、振動数 λ^2 は $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ である。

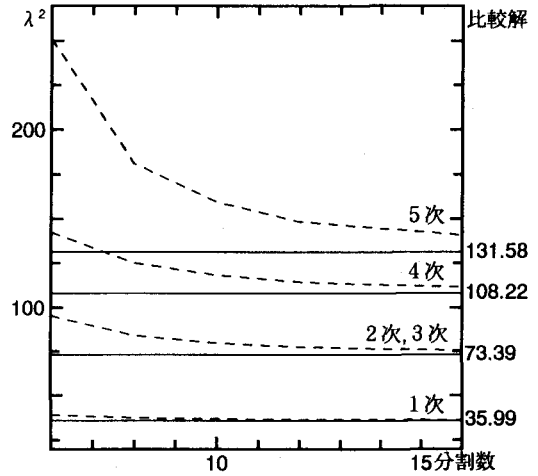


Fig 1 矩形板 ($a/b=1.0$)

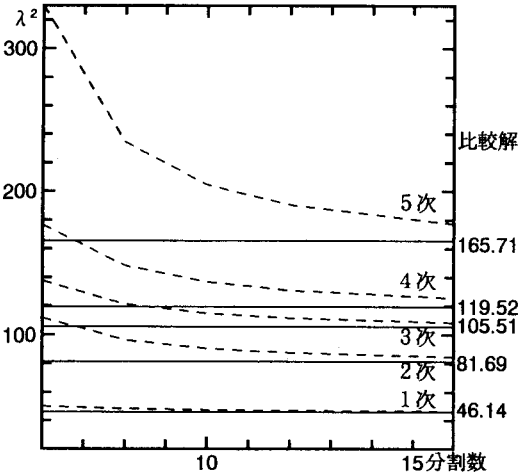


Fig 2 斜板 ($a/b=1.0$ 、 $\theta=30^\circ$)

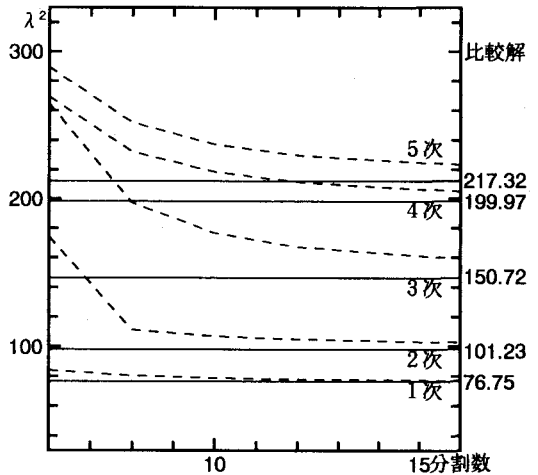


Fig 3 直交異方性板 ($a/b=1.0$ 、 $E_L/E_T=10$)

[参考文献]

- 1) 崎山毅、松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp21-28，1983。
- 2) 関谷壮、浜田実、角誠之助：平板構造強度設計便覧，朝倉書店
- 3) Hearmon,R.F.S.：The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plate with Clamped or Supported Edges, J.Appl.Mech., Vol.26, No.3-4,Dec.1959,pp537-540