

## Pasternak基礎上の片持ち長方形板の動的安定性

長崎大学大学院 学生員 ○古谷寿章

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 著者等は、Kar<sup>1)</sup>によって提案されたPasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定を、平板の問題へと拡張してきた<sup>2)</sup>。これまで長方形板の境界条件が単純支持と固定の組合せの場合を解析したが<sup>2)</sup>、本論文では片持ち長方形板の解析を行う。

自由辺における力学的境界条件を満足する座標関数を求めることが困難なため、本論文では幾何学的境界条件のみを満足する関数を用いて解析できるRitz法に基づく解析を行う。Ritz法で求めた自由振動の固有振動形を用い、全ポテンシャルエネルギーにHamiltonの原理を適用し離散化を行う。そのようにして得られた運動方程式を行列表示した後に、固有値問題に変換する方法<sup>3)</sup>を用いて不安定領域を求める。

数値解析において、Pasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち長方形板の動的安定性をPasternak基礎、変断面および温度パラメータのもとに解析する。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すような、Pasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ち長方形板が、x方向の一様分布の静的面内力と変動面内力を受ける場合を考える。Pasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面長方形板のひずみエネルギーV、変断面長方形板の運動エネルギーTおよび面内力による仕事Uは、次のように与えられる。

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \} dx dy + \frac{K_e}{2} \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy + \frac{K_s}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} \int_0^b \int_0^a h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

$$U(w) = -\frac{N_x}{2} \int_0^b \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

ここに、w:たわみ、 $D(x) = E(x)h(x)^3/12(1-\nu^2)$ :

板剛度、 $E(x)$ :ヤング率、 $h(x)$ :板厚、 $\nu$ :ポアソン

比、 $\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ 、 $K_e$ :バネ定数、 $K_s$ :せん断層定数、 $x, y$ :平板中央面の座標系、 $\rho$ :板の密度、 $t$ :時間、 $N_x = N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t$ :面内力、 $N_{x0}$ :静的面内力、 $N_{xt}$ :変動面内力の振幅、 $\Omega$ :変動面内力の円振動数。

上式において熱勾配の項はヤング率Eに含まれている。本研究では、片持ち長方形板の板厚およびヤング率はx方向に線形的に変化するものとし、 $x=a$ での板剛度 $D_1$ 、板厚 $h_1$ 、ヤング率 $E_1$ を用いると、断面内のx点における諸値は次のように設定される<sup>2)</sup>。

$$h(x) = h_1 \{1 + \beta^* (1 - x/a)\} = h_1 G(x), \quad E(x) = E_1 \{1 - \delta (1 - x/a)\} = E_1 T(x), \\ D(x) = D_1 \{1 - \delta (1 - x/a)\} \{1 + \beta^* (1 - x/a)\}^3 = D_1 T(x) G(x)^3 = D_1 S(x). \quad (4)$$

ここに、 $\beta^*$ :変断面パラメータ、 $\delta$ :温度パラメータ、 $G(x), T(x), S(x)$ :xの関数。

動的安定性解析を行うにあたり、たわみwを次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (5)$$

ここに、 $T_{mn}$ :未知の時間関数、 $W_{mn}$ :自由振動の固有振動形。

一般座標に関する運動方程式を誘導するためにHamiltonの原理を適用し、 $x, y$ 座標、時間および外力に

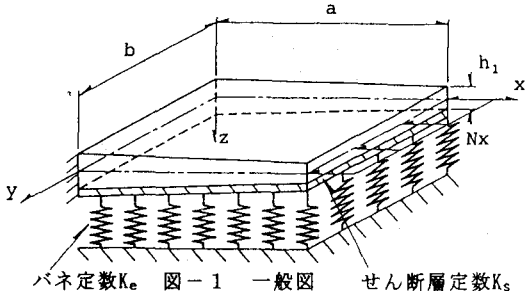


図-1 一般図

関して無次元化する。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [C_{mn}^{kl} \ddot{T}_{mn} + \{ \frac{1}{\lambda_{11}} A_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_{11}} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xl} \cos \bar{\omega} \tau) B_{mn}^{kl} \} T_{mn}] = 0 \quad (6)$$

ここに、 $\lambda_{11} = 4 \sqrt{\rho h_1 \omega_{11}^2 b^4 / D_1}$  ( $\omega_{11}$ : Pasternak 基礎がない一様断面片持ち長方形板の1次の固有振動数),  $D_1, h_1$ :  $x=a$ での板剛度, 板厚,  $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$ : 無次元静的面内力,  $\bar{N}_{xl} = N_{xl} / N_{cr}$ : 無次元変動面内力,  $N_{cr} = \lambda_{cr} D_1 / b^2$ : 座屈面内力 ( $\lambda_{cr}$ : Pasternak 基礎がない一様断面片持ち長方形板の座屈固有値),  $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}$ : 変動面内力の円振動数,  $\tau = \omega_{11} t$ : 時間。

式(6)を次のように行列表示する。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xl} \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $[F] = [C]^{-1}[A]$ ,  $[G] = [C]^{-1}[B]$ 。

式(7)の行列の要素構成より、 $y=b/2$ に対し対称振動と非対称振動の2つのグループに分けられる。次いで、一般解をフーリエ級数を使って仮定し<sup>3)</sup>、安定判別は文献3)の方法を用いて行う。

3. 動的不安定領域 図-2は、Pasternak基礎上の熱勾

配をもつ変断面片持ち正方形板 ( $\beta^*=0.6$ ,  $\delta=0.8$ ,  $\kappa_e=1.0$ ,  $\kappa_s=2.0$ )の不安定領域を、初期面内力のない場合 ( $\bar{N}_{x0}=0.0$ )に対して示したものである。図中の縦軸は、一様断面片持ち正方形板 ( $\beta^*=\delta=0.0$ ,  $\kappa_e=\kappa_s=0.0$ )の座屈荷重  $\bar{N}_{cr}$ で無次元化した変動面内力の振幅で、横軸は同じく一様断面片持ち正方形板の1次の固有振動数で無次元化した励振振動数である。図中の不安定領域は、 $\bar{N}_{xl}=1.0$ における励振振動数の幅が0.1以上のものをプロットしている。図のように単純共振の主不安定領域 ( $2\omega_{ij}/k$ ,  $k=1$ )と、結合共振の主不安定領域 ( $(\omega_{ij} + \omega_{mn})/k$ ,  $k=1$ )が得られている。 $k \geq 2$ に対応する副不安定領域は狭いため、プロットされていない。また、図のように単純共振の不安定領域が結合共振よりも広い。

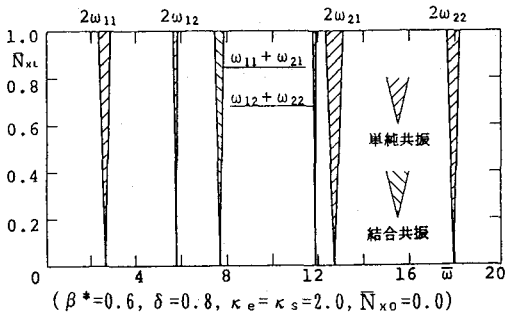


図-2 不安定領域図

図-3は、熱勾配をもつPasternak基礎上変断面片持ち正方形板 ( $\kappa_e=\kappa_s=2.0$ )の不安定領域に及ぼす変断面パラメータ  $\beta^*$ および温度パラメータ  $\delta$ の影響を示したものである。縦軸は無次元変動面内力  $\bar{N}_{xl}=1.0$ における不安定領域の幅  $\bar{\omega}$ を示す。図のように、 $\beta^*$ は長方形板の剛性を大きくするので、不安定領域の幅を狭くする。一方  $\delta$ は、長方形板の剛性を小さくするので不安定領域の幅を広くする。なお、Pasternak基礎の存在は文献2)に示したように、不安定領域の幅を狭くする効果をもつ。

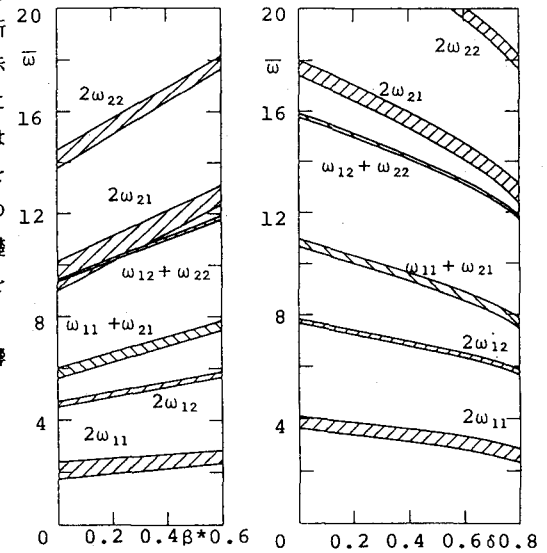
4. まとめ 各パラメータの不安定領域に及ぼす影響については、講演時に発表する。

#### 参考文献

1) Kar, R.C. and Sujata, T.: Computer & Structures, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 1988.

2) 高橋, 其田, 夏秋: 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 55-62, 1992.

3) 夏秋, 高橋, 小西: 片山技報, Vol. 8, pp. 1-9, 1988.



(a) 変断面の影響,  $\delta=0.8$  (b) 熱勾配の影響,  $\beta^*=0.6$

図-3 不安定領域変動図