

積層長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○佐藤 司

長崎大学工学部 正 員 高橋 雄

1. まえがき 積層板は、幾つかの優れた物理的、力学的特性を持つ材料を組み合わせることや、繊維方向を変化させることにより、新しい優れた特性を持つ材料が得られる。このため近年、積層板に関する研究は盛んに行われ、その力学特性もかなり明らかにされてきた¹⁾。しかし、動的安定性を取り扱った研究は、あまり見受けられない。著者らはこれまでの研究で、積層板についての振動特性、座屈特性を明らかにした²⁾。次いで本研究では、対称積層した長方形板の動的安定性について、異方性の影響、積層数、各種境界条件および繊維角度による影響を検討し、動的不安定領域を明らかにしたものである。

2. 変形によるエネルギーおよび境界条件 図-1に示すような積層長方形板に対して、x方向に一様分布の静的面内力 N_{x0} と変動面内力 $N_{xt} \cos \Omega t$ が作用する場合を考える。なお、本研究では積層薄板理論³⁾を適用しているため、板厚方向の応力成分を無視すると、ひずみエネルギーは、次のように与えられる。

$$V(w) = \frac{1}{2} \iint_A [D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)] dA \quad (1)$$

ここに、 w ：板の中央面のたわみ、 x, y ：板の中央面の座標系、 $D_{11}, D_{12}, D_{66}, D_{22}, D_{16}, D_{26}$ ：板剛度
次に、運動エネルギー $T(w)$ および面内力が作用する場合の仕事 $U(w)$ は、

$$T(w) = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \quad (2), \quad U(w) = \frac{1}{2} (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (3)$$

ここに、 ρ ：板の密度、 h ：積層板の板厚、 N_{x0} ：静的面内力、 N_{xt} ：変動面内力の振幅、 t ：時間、 Ω ：変動面内力の円振動数
また、長方形板の境界条件には、次の4種類を考える。

CASE I：全周辺単純支持、CASE II：荷重辺単純支持、他対辺固定
CASE III：荷重辺固定、他対辺単純支持、CASE IV：全周辺固定

3. 解法

積層板のたわみを次式のように仮定する。

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (4)$$

ここに、 $\bar{T}_{mn}(t)$ ：時間に関する未知の関数、 $W_{mn}(x, y)$ ：幾何学的境界条件を満足する座標関数²⁾で、固有振動解析で得られた固有振動形を用いる。

ここで、運動方程式を誘導するためにHamiltonの原理を適用する。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{ T - (V - U) \} dt = 0 \quad t=t_1, t_2 \text{ で } \delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0 \quad (5)$$

式(5)の変分を行ってまとめると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_{mn}^{kl} \bar{T}_{mn} + \left\{ \frac{1}{\lambda_{0v1}^4} B_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_{0b}}{\lambda_{0v1}^4} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) C_{mn}^{kl} \right\} \bar{T}_{mn} \} = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに、} A_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 W_{mn} W_{kl} d\xi d\eta, \quad C_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} W_{mn, \xi} W_{kl, \xi} d\xi d\eta$$

$$B_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{D_1^*}{\beta^4} W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + D_2^* W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + \frac{D_3^*}{\beta^2} (W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi}) + 4 \frac{D_6^*}{\beta^2} W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} \right. \\ \left. + 2 \frac{D_4^*}{\beta^3} (W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi}) + 2 \frac{D_5^*}{\beta} (W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi} + W_{mn, \xi\xi} W_{kl, \xi\xi}) \right\} d\xi d\eta$$

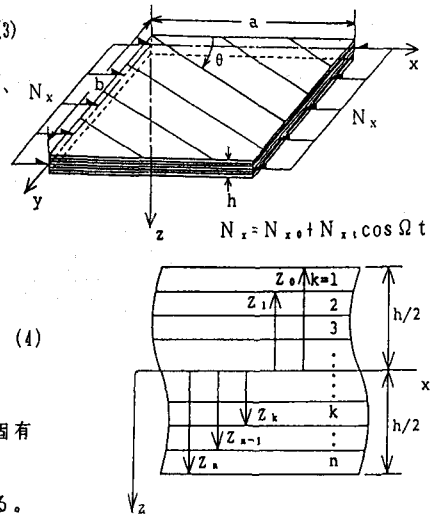


図-1 一般図

$W_{mn, \xi}, W_{mn, \xi\xi}, W_{mn, \xi\eta}, W_{mn, \xi\tau}, W_{mn}$ の微分からなる関数、 $W_{kl, \xi}, W_{kl, \xi\xi}, W_{kl, \xi\eta}, W_{kl, \xi\tau}, W_{kl}$ の微分からなる関数

ここに、 $\xi = x/a, \eta = y/b, \beta = a/b$ (縦横比)、 $D_1^* = D_{11}/D_1^0, D_2^* = D_{22}/D_1^0, D_3^* = D_{12}/D_1^0, D_4^* = D_{16}/D_1^0, D_5^* = D_{26}/D_1^0, D_6^* = D_{66}/D_1^0, \tau = \omega_{11}^0/\bar{\omega}, \bar{\omega} = \Omega/\omega_{11}^0, \bar{N}_{x0} = N_{x0}/N_{cr}, \bar{N}_{x1} = N_{x1}/N_{cr}, \lambda_0^0 = N_{xc}b^2/D_1^0, N_{cr}$: 座屈面内力、 $\lambda_0^0 v_1^4 = \rho b b^4 \omega_{11}^0{}^2/D_1^0 : \theta = 0^\circ$ の 1 次の振動固有値、 $D_1^0 : D_{11}$ の $\theta = 0^\circ$ における板剛度、 $\omega_{11}^0 : \theta = 0^\circ$ の 1 次の固有円振動数、 ω_{mn} : 固有円振動数

式(6)を行列表示すると次式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}\} + [B]\{\dot{T}\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{x1} \cos \bar{\omega} \tau)[C]\{T\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $\{T\} = \{T_{11} T_{12} \cdots T_{1L} T_{21} T_{22} \cdots T_{2L} \cdots T_{L1} \}^T, [A] : A\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = A_{mn},$

$$[B] : B\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = B_{mn}/\lambda_0^0 v_1^4, [C] : C\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = -C_{mn} \lambda_0^0 / \lambda_0^0 v_1^4 \quad (i, j, m, n=1, \dots, L)$$

式(7)の一般解を指数関数とフーリエ級数の積で仮定し、調和バランス法により 2 倍サイズの固有値問題に変換して系の安定の判別を行う。

4. 数値結果 図-2 は異方性が大きい材料 GRAPHITE/EP を用いた 3 層からなる全周辺単純支持正方形板 (CASE I, $\beta = 1.0, \theta = 30^\circ$) の変動面内力の振幅を変化させた時の動的不安定領域を示している。縦軸 $\bar{N}_{x1}$ は、変動面内力 N_{x1} の振幅を $\theta = 0^\circ$ の座屈面内力 N_{cr} で無次元化した無次元変動面内力、横軸 $\bar{\omega}$ は励振振動数を $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有振動数 ω_{11}^0 で無次元化した無次元励振振動数である。図では右上がりの斜線部が単純共振、右下がりの斜線部が結合共振を意味する。CASE I では $\theta = 0^\circ$ では単純共振しか表われないが、繊維角度を変化させることにより結合共振が表れ、この不安定領域は主不安定領域よりも狭い。

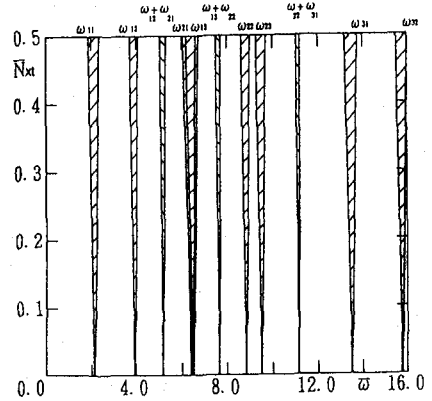
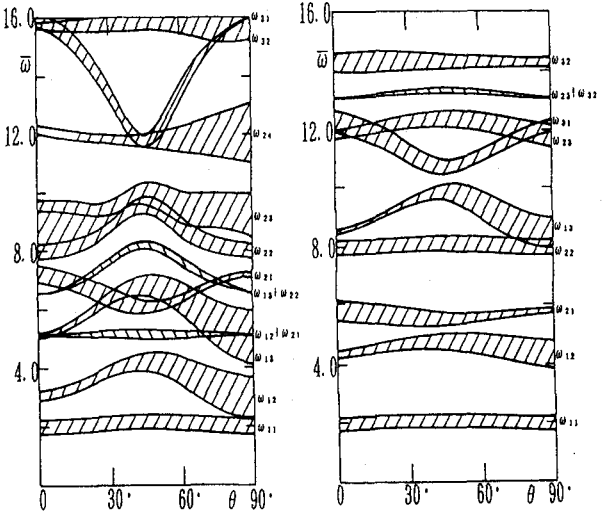


図-2 動的不安定領域
(CASE I, $\beta = 1.0, \theta = 30^\circ$)

図-3 はそれぞれ 3 層からなる異方性が小さい材料 EGLASS/EP と大きい GRAPHITE/EP を用いた全周辺単純支持正方形板 (CASE I, $\beta = 1.0$) のもとでの繊維角度の変化による動的不安定領域の変化を示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は励振振動数を $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数、横軸は繊維角度である。変動面内力の振幅には、繊維角度が $\theta = 0^\circ$ における $\bar{N}_{x1} = 0.5$ の値を用いている。繊維角度を変化させることにより動的不安定領域が変動し、この変動は異方性の大きな材料ほど激しくなる。また、繊維角度を変化させることにより結合共振が表れ、この動的不安定領域は 45° 付近で最も広くなる。



(1) EGLASS/EP (2) GRAPHITE/EP
図-3 不安定領域の変動 (CASE I, $\beta = 1.0$.)

5. まとめ 繊維角度を変化させることにより動的不安定領域が変動するが、この変動は異方性の大きな材料ほど激しくなる。また、結合共振の発生も見られた。境界条件、層数の影響については、講演時に発表する。

1) 一宮・成田・丸山: FRP 積層長方形板の定常応答, 日本機械学会論文集 (C 編), 55-511, pp. 549-555, 1989. 3.

2) 高橋・佐藤・江島: 積層長方形板の振動および座屈特性, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集, 第 17 巻, pp. 197-202, 1993.

3) 森田・金原・福田: 複合材料, 日刊工業新聞社, pp. 13-27, 1988. 2.