接続マトリックスを用いた非線形座屈解析

熊本大学　正員　○佐藤 啓治
同上　正員　三池 亮次
同上　宮本 章信
同上　松崎 直樹

1．はじめに

接続マトリックス[1)]を用いると、接線剛性マトリックス$\mathbf{K}_T$の汎用式や、骨組み構造の線形座屈汎用式を簡潔かつ正確に誘導できることについてはすでに報告[2)]の通りである。ここでは、この汎用式を用い、大変形するピン結合トラス構造の非線形座屈解析を試みる。

非線形座屈解析の手法として、変位制御法における制御変位をパラメーターとして$\mathbf{K}_T$の行列式$|\mathbf{K}_T|=0$となる制御変位を求め、この制御変位から座屈荷重を推定する方法を用いる。

2．有限変位解析の基礎式

筆者らは、さきに接続マトリックスを用いた大変形解析の基礎式

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{1}$$

を誘導した。ここに、$\Delta\mathbf{P}$は変形の中間状態からの増分荷重、$\mathbf{K}$は増分後の剛性マトリックス、$\Delta\mathbf{d}$は増分変位、$\mathbf{b}$は有限変位に関する補正項であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &= \Delta\mathbf{C}\mathbf{P}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

ここに、$\mathbf{C}'$は中間状態における接続マトリックス、$\mathbf{K}_m$は、トラスの場合バネ定数$k = EA_I/L_I$を要素とする対角マトリックス、Eはヤング率、Aは部材断面積、Lは部材長で、添字$_I$は第I番目を意味する。$\mathbf{P}'_m$は中間状態の部材断面力で、トラスの場合は軸力Nによって構成されるベクトルで、$\Delta\mathbf{e}_{m\theta}$は大変形ひずみの補正項である。

(1)式を増分変位$\Delta\mathbf{d} = \{\Delta d_i\}$で微分すると、$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$における$\Delta\mathbf{P}$の微分

$$\begin{aligned} \delta\Delta\mathbf{P} &= (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G)\delta\Delta\mathbf{d} \\ &\equiv \mathbf{K}_T\delta\Delta\mathbf{d} \end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。ここに、$\mathbf{K}_E$は弾性剛性マトリックス、$\mathbf{K}_G$は幾何剛性マトリックスで、次式

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T \\ \mathbf{K}_G &= \frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\Delta\mathbf{d}}\overline{\mathbf{P}'_m} \\ &\equiv \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_1}\mathbf{P}'_m, \frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_2}\mathbf{P}'_m, \cdots\right] \end{aligned} \tag{4}$$

また、$\overline{\mathbf{P}'_m}^T = [\mathbf{P}'^T_m, \mathbf{P}'^T_m, \cdots]$である。以下、添字一で同じベクトルを列方向に配列するベクトルと定義する。任意の2次元及び3次元トラスの$\mathbf{K}_G$が中間状態における部材の方向余弦$\boldsymbol{\ell}'$を用いて簡潔に与えられることについて既に発表のとおりである

3．有限変位解析

式(3)で与えられる接線剛性マトリクスを用い増分変位と増分荷重を次のように2組の部分構造に分割する。

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}_1 \\ \Delta\mathbf{P}_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{T11} & \mathbf{K}_{T12} \\ \mathbf{K}_{T21} & \mathbf{K}_{T22} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{d}_1^{(i)} \\ \Delta\mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

変位制御による有限変位解析は上式の$\Delta \mathbf{d}_2$を制御変位として、また、$\Delta \mathbf{P}_1 = 0$を与えた場合の i 番目の iteration における$\Delta \mathbf{d}_1^{(i)}$を図－1に示されるような Newton-Raphson 法に従って求める問題である。なお、制御変位$\Delta \mathbf{d}_1^{(i)}$は、各 STEP の第1の iteration で与え、第2の iteration 以降の$\Delta \mathbf{d}_1^{(i)} = 0$ $(i = 2, 3 \cdots)$ とする。$\Delta \mathbf{d}^{(i)}$から正確な増分荷重$\Delta \mathbf{P}_2^{(i)}$は、式(1)に従い求める。

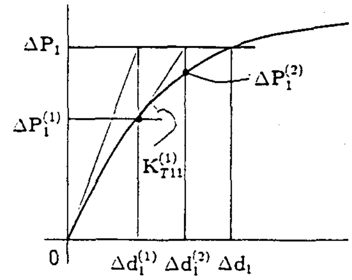

図1　$\Delta \mathbf{P}_1$より$\Delta \mathbf{d}_1^{(i)}$を求める

4．非線形座屈解析

非線形座屈解析の手法として、行列式$\Delta = |\mathbf{K}_T|$が零となるような荷重を座屈荷重とする方法と、非線形座屈の直前の大変形した構造形状において、固有値を求める手法がある。ここでは、前者の手法に従うが、$\Delta = 0$を推定するパラメーターとして1個の制御変位Δd_2を用いると、$\Delta = 0$の点の追求が比較的、容易になる。$\delta \Delta \mathbf{P}_1 = 0$の場合、式(3)は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T11} & \mathbf{k}_{T12} \\ \mathbf{k}_{T21}^T & K_{T22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \Delta \mathbf{d}_1 \\ \delta \Delta d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \Delta P_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

のようになる。$|\mathbf{K}_T| = 0$の点が図－2に示すように有限変位解析の (N)STEP から (N+1)STEP の間に生じた場合、その両端の行列式をΔ_1とΔ_2とする。$\Delta - d_2$曲線が（1）上に凹の場合Δ_2をΔ_2'に修正し (N)STEP に戻り制御変位を$\Delta d_2'$に修正して新たなΔを求める。（2）これが上に凸の曲線の場合には、制御変位を$\Delta d_2'$に修正しΔ_1をΔ_1'に前進させ、新たなΔを求める。

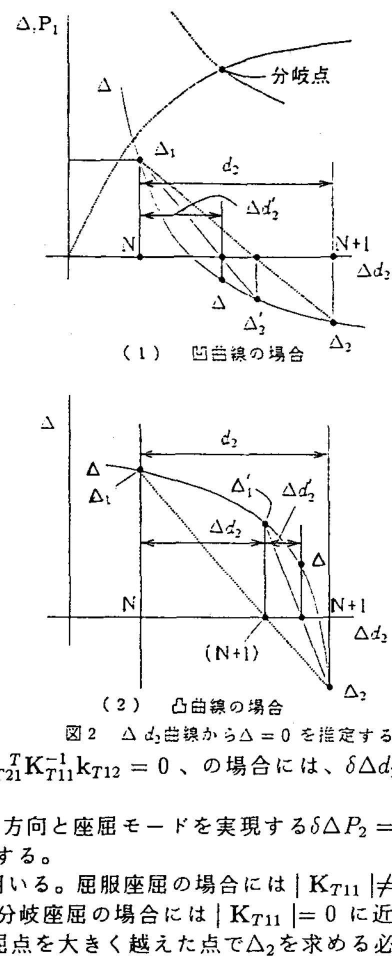

図2　Δ d_2曲線から$\Delta = 0$を推定する方法

（1）屈服座屈　　式(6)において、$K_{T22}' = K_{T22} - \mathbf{k}_{T21}^T \mathbf{K}_{T11}^{-1} \mathbf{k}_{T12} = 0$、の場合には、$\delta \Delta d_2 \to \infty$となり、これは屈服座屈となる。

（2）分岐座屈　　$K_{T22}' \neq 0$には$\delta \Delta d_2 = \delta \Delta P_2 / K_{T22}'$の方向と座屈モードを実現する$\delta \Delta P_2 = 0$とする固有値ベクトルの2方向が存在し荷重変位曲線は分岐する。

制御変位d_2より、他の変位$\mathbf{d}_1$を求めるとき$\mathbf{K}_{T11}^{-1}$を用いる。屈服座屈の場合には$|\mathbf{K}_{T11}| \neq 0$であるから比較的$|\mathbf{K}_T| = 0$の追究は容易である。しかし、分岐座屈の場合には$|\mathbf{K}_{T11}| = 0$に近づく可能性があり、この場合には制御変位を大きくして分岐座屈点を大きく越えた点でΔ_2を求める必要があり、解析を困難とする。

上記の数値解析の例については、研究発表会において説明する。

参考文献

1). Livseley; Matrix Method of Structual Analysis

2). R.Miike,I.Kobayashi,et.al.; Virtual Large Displacement Theorem,ASCE.

3). 佐藤啓治、三池亮次、小林一郎、山本清孝; 接続マトリックスを用いたトラスの座屈汎用式、土木学会講演会