

パソコンを用いたアダプティブP法有限要素解析システム

麻生福岡短期大学 正員 大浦洋子
福岡大学 添田朋子
福岡大学 正員 黒木健実

1. はじめに

ハード面ではコンピュータのダウンサイジング、ソフト面ではCAE(Computer Aided Engineering)システムの普及に伴い、有限要素法は以前にまして広く利用されるようになった。プリ・ポストプロセッサの付いたCAEシステムは有限要素法を非常に身近なものとしたが、有限要素法は領域を離散化して得られる近似解である。この近似解は領域の離散化に従属してしまうので、要素分割の仕方に依存する場合が多くみられる。例えば、応力集中のある部分に対しては、細かい要素を使用しなければ十分な精度が得られないので、どの部分に応力が集中するのかをあらかじめ予測しておかなければならない。また、得られた解がどの程度の精度を持っているかを簡単には把握できない等の問題があった。これらの問題を解決するために、最近では解の精度を保証した解適応型要素(アダプティブ要素)を採用するシステムが増えてきた。アダプティブ法は、解の精度の良くない領域を細分割するh法(節点数が増加する)、節点座標を移動させて解の精度を上げるr法(節点数は増加しない)、さらに精度の良くない要素に対して高次の形状関数を適用するp法(節点数は増加しない)の3種類に大別できる。本論文では先に発表したパソコンによるCAEシステム¹⁾の追加項目として、p法によるアダプティブ解析システムを作成したので、その概要について述べる。

2. 支配方程式とp法アダプティブ要素

2次元弾性体における平面応力ならびに平面ひずみを満足する支配方程式は、領域を Ω 、境界を Γ とすれば、

$$\nabla^T(D\nabla u) + f = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad N_n D\nabla u = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (1)$$

となる。ここに、 u は変位ベクトル、 D は剛性マトリックス、 ∇ は微分作用素、 f は外力ベクトル、 N_n は境界外向き法線ベクトル、 $\bar{t}$ は境界表面ベクトルを表す。

p法は各要素において中間節点を設けず、高次の形状関数を合成することにより、解の精度を向上させる方法である。従って、初期の要素分割による解の精度が十分でなくても要素分割を変更したり、節点を増やしたりすることはない。

x, y 方向における変位をそれぞれ u, v とする。 y 方向の変位 v についても同様に示されるので、 x 方向の変位 u についてのみ述べる。要素内の近似変位 $\hat{u}$ は次のように表せる。

$$\hat{u} = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \quad (2)$$

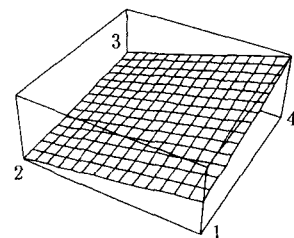
ここに、 u_i は節点 i に対する変位、 N_i は1次式で表せる形状関数であり、表1で示される。式(2)を用いて近似された変位 $\hat{u}$ は、図1(a)に示されるように各辺上で線形(1次)に変化している。

p法はさらに各辺上で2次式以上の高次の形状関数を階層的に追加することによって、解の精度を向上させることを目的としている。式(2)に辺1-2上で2次関数的に変化する形状関数 N_5 を追加した

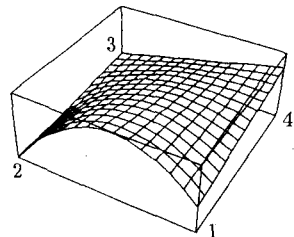
$$\hat{u} = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 + \alpha_1 N_5 \quad (3)$$

を導入する。ここに、 α_1 は要素の中心点における高次近似の $\hat{u}$ と線形近似の $\hat{u}$ のずれを表すパラメータである。図1(b)は式(3)を表したものである。以下、解の精度が要求基準を満たすまで表1に示される3次式、4次式の形状関数が追加される。

また、1つの要素内で2つ以上の高次関数を追加したときは、さらに各辺上では0、要素の中央で1の値をもつ $N_{17} = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)$ を追加する。



(a) 1次の形状関数



(b) 1次と2次の合成

図1. 辺1-2上における形状関数の合成

表1. 各辺上における Legendre の多項式を用いた形状関数

	辺1-2	辺2-3	辺3-4	辺4-1
1次式	$N_1 = (\xi-1)(\eta-1)/4$	$N_2 = -(\xi+1)(\eta-1)/4$	$N_3 = (\xi+1)(\eta+1)/4$	$N_4 = -(\xi-1)(\eta+1)/4$
2次式	$N_5 = (\xi^2-1)(\eta-1)/2$	$N_6 = -(\xi+1)(\eta^2-1)/2$	$N_7 = -(\xi^2-1)(\eta+1)/2$	$N_8 = (\xi-1)(\eta^2-1)/2$
3次式	$N_9 = -(\xi^3-\xi)(\eta-1)$	$N_{10} = (\xi+1)(\eta^3-\eta)$	$N_{11} = (\xi^3-\xi)(\eta+1)$	$N_{12} = -(\xi-1)(\eta^3-\eta)$
4次式	$N_{13} = -\frac{3}{8}(5\xi^2-1)(\xi^2-1)(\eta-1)$	$N_{14} = \frac{3}{8}(\xi+1)(5\eta^2-1)(\eta^2-1)$	$N_{15} = \frac{3}{8}(5\xi^2-1)(\xi^2-1)(\eta+1)$	$N_{16} = -\frac{3}{8}(\xi-1)(5\eta^2-1)(\eta^2-1)$

3. 誤差の評価と次数の決定

誤差の評価は元の次数をもつ形状関数を使って得られた有限要素解 $\hat{u}$ とそれより1次高い形状関数を使って得られた解 $\tilde{u}$ を用いて行う。本システムでは要素ごとに誤差評価を行う代わりに、各辺ごとに誤差評価を行い、要求基準を越えている辺のみの次数を更に順次上げていく。この方法により十分な精度をもつ辺に関しては余分な次数の増加を行わないので、計算時間を短縮することができる。誤差評価は

$$\|e_{i<j}>\| = \frac{\|\hat{u}_{i<j>} - \tilde{u}_{i<j>}\|}{\|\tilde{u}_{i<j>}\|}, \quad \|u_{i<j>}\| = \left[\int_{\Gamma_{i<j>}} \{u_{i<j>}\}^2 d\Gamma \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

で与えられる。ここに、 $\Gamma_{i<j>}$ は要素 i の j 番目の辺を表す。

すべての辺において誤差の要求基準が満たされたとき解が収束したと判定され、解析処理を終了する。

4. 例題

図2に示す穴あき平板引っ張り問題のp-法ならびに四角形双1次要素による解析結果をそれぞれ図3と図4に示す。図3ならびに図4の(a)、(b)はそれぞれメッシュと最大主応力の等値線を表す。双1次要素に比べてp-法の節点と要素の数は極端に少ないにもかかわらず、最大主応力の等値線はほぼ似たような結果が得られている。さらに、円孔付近の様子を見るために、図5は図2における点Aから点Gまで各点における最大主応力の値を示したものである。また、p-法は節点数が少ないのが特徴であるが、メッシュ上の節点だけでは等値線をなめらかに描くのは困難である。本システムではポストプロセッサ用に各要素内に模擬節点を設け、その情報を基に等値線を描いている。

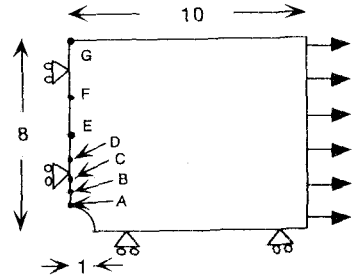
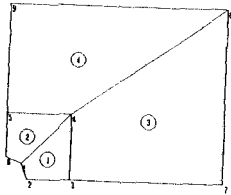
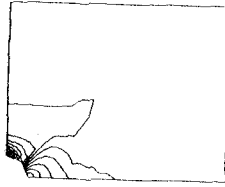


図2. 穴あき平板引っ張り問題

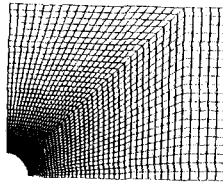


(a) メッシュ

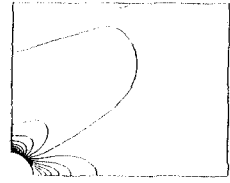


(b) 最大主応力

図3. p-法による解析結果



(a) メッシュ



(b) 最大主応力

図4. 双1次要素による解析結果

5. おわりに

p-法は粗い要素分割でも精度の良い解が得られるのが特徴であるが、本システムは四角形4点要素を基準としたp-法であるので、曲線の境界をもつ領域に対しては入力誤差が避けられない。今後の課題として、要素分割が粗くても領域の形状が損なわれないような基準要素の導入が必要である。

謝辞

本システムの作成にあたり、有益なご助言ならびにご協力を頂いた東京理科大学の大西和榮教授と福岡大学的小林錦子さんに謝意を表します。

参考文献

1. 大浦洋子 他: "パソコンによる有限要素法 CAE システム", 森北出版, 1993.
2. 神谷紀生 他 編集: "ソフトウェアの誤差評価とアダプティブ要素", コンピュータロー, No.42, 1993.
3. ラズナ(株): P 法概説書, 1990.

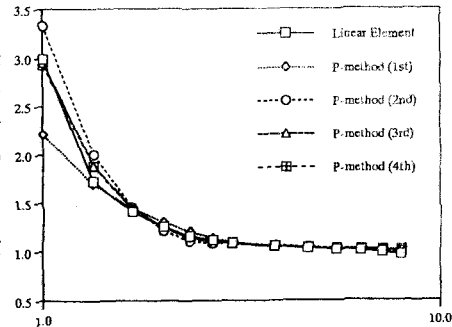


図5. p-法と双1次要素による最大主応力