数式処理言語Mathematicaの構造解析への応用

福岡大学工学部　正員　大塚宣子
福岡大学工学部　正員　坂田　力
福岡大学工学部　正員　黒木健実

1．はじめに

数式処理言語Mathematicaは、「数値的」「記号的」「グラフィックス的」な処理を統一的な方法で取扱うシステムであり、プログラミング言語である。FORTRANやCと大きく異なるのは、「記号的」な取扱が可能であること、つまり数式を扱うことができることである。今回、このMathematicaを教育・研究に役立てることができないかと考え、構造解析への応用を試みた。

構造解析において、モデルを「解く」ことの前提にあるのは、「剛性マトリックスを作る」ことである。２次元骨組構造物程度ならば、実際に自分の手で式を展開して剛性マトリックスの式を導出することもそう困難ではない。しかし、３次元元や有限変位解析などになってくると、この式の導出は大変な労力を要することになる。そこで、Mathematicaの「記号的」処理の能力を用いて、構造物の剛性マトリックスの式を求めることを考えた。

また、Mathematicaの「数値的」な処理を使って、有限要素法の計算をさせることもできる。２次元トラスの解析プログラムをMathematicaで作成した。

さらに、有限要素法の後処理への応用として、Mathematicaの「グラフィック的」処理の能力を用いて、モデルや解析結果を視覚的にとらえるための図をかかせるプログラムを作成した。

2．有限要素法における要素剛性マトリックスの式を求める

部材の任意の位置xと変位$\mathbf{u}$との関係　$\mathbf{u} = \mathbf{C}\alpha$

部材の節点変位$\mathbf{u}_e$と係数αとの関係　$\mathbf{u}_e = \mathbf{B}\alpha$

変位$\mathbf{u}$と節点変位$\mathbf{u}_e$との関係　$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_e$

ひずみ－節点変位関係式　$\mathbf{e} = \mathbf{H}\mathbf{u}_e$

応力－ひずみ関係式　$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon$

各関係が以上のような式で表されるとき、要素剛性マトリックスは

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{H}^t \mathbf{E} \mathbf{H}\, dx$$

で求められる。

２次元トラスの場合、

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{dC_1}{dx} \\ \dfrac{d^2C_2}{dx^2} \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_{x=0} \\ C_{x=L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

この場合のプログラムと、実行結果を図1に示す。

構造物が変わることで変化するのは$\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$の定義である。初めの３式で$\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$を定義する。４式目で$\mathbf{C}$に$x=0, x=\mathrm{L}$を代入して得られるマトリックスを合成して$\mathbf{B}$を計算し、その$\mathbf{B}$を用いて先に定義されている$\mathbf{H}$と、$\mathbf{E}$との積をとる。最後から２行めでそれを積分して$\mathbf{K}$を求めている。

```
(* Rahmen *)

c := {{ 1 , x , 0 , 0 ,   0 ,    0 },
      { 0 , 0 , 1 , x , x^2 ,  x^3 },
      { 0 , 0 , 0 , 1 ,  2x , 3x^2 }};

e := {{ EA ,  0 },
      {  0 , EI }};

h  := {  D[c,x][[1]],
         D[c,{x,2}][[2]]  }.Inverse[b];

b  =  Join[c/.x->0,  c/.x->L];

Transpose[h].e.h;
k  =  Integrate[%,{x,0,L}]
```

図１(a)　２次元トラスの剛性マトリックスの式を求めるプログラム

$$\{\{\frac{EA}{L},\ 0,\ 0,\ -(\frac{EA}{L}),\ 0,\ 0\},$$
$$\{0,\ \frac{12\ EI}{L^3},\ \frac{6\ EI}{L^2},\ 0,\ \frac{-12\ EI}{L^3},\ \frac{6\ EI}{L^2}\},$$
$$\{0,\ \frac{6\ EI}{L^2},\ \frac{4\ EI}{L},\ 0,\ \frac{-6\ EI}{L^2},\ \frac{2\ EI}{L}\},$$
$$\{-(\frac{EA}{L}),\ 0,\ 0,\ \frac{EA}{L},\ 0,\ 0\},$$
$$\{0,\ \frac{-12\ EI}{L^3},\ \frac{-6\ EI}{L^2},\ 0,\ \frac{12\ EI}{L^3},\ \frac{-6\ EI}{L^2}\},$$
$$\{0,\ \frac{6\ EI}{L^2},\ \frac{2\ EI}{L},\ 0,\ \frac{-6\ EI}{L^2},\ \frac{4\ EI}{L}\}\}$$

図１(b)　出力

他の一般的な弾性問題や、有限変位解析、弾塑性解析などでも、関係式をこの形に書けさえすれば、プログラムの$\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$の部分を書き換えるだけで剛性マトリックスの式を同様に求めることができる。

3．有限要素法による数値計算への応用

Mathematicaで通常の数値計算を行うことも可能である。２次元トラスの構造計算プログラムをMathematicaで作成した。

Mathematicaによるマトリックス計算は、マトリックスそのものを一つの変数として扱うことができるので演算が簡単である。逆行列の計算や連立方程式を解く関数が既に用意されているので非常に便利である。有限要素法の計算はマトリックス計算が主であるから、この点からいえば、Mathematicaを有限要素法に応用することはリーズナブルであるといえよう。

計算そのものの速度はFortran等よりも遅い感があるが、数値を桁落ちなしに厳密に扱うことができるので、剛性マトリックスの精度が問題となる場合や、境界要素法での特異積分などの精度が問題になる場合には適していると思われる。

4．解析の後処理への応用

Mathematicaのグラフィックス的な処理能力を使って、有限要素法の後処理のプログラムを作成した。骨組構造解析での骨組図・変位図（図２）・部材力図、２次元、３次元の一般的な弾性解析での変位図・応力分布図などを描くことができる。プログラムの一部を図３に示す。

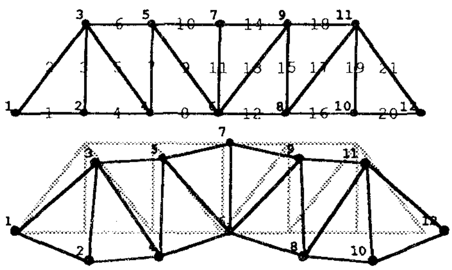

図２　変位図

```
SetDirectory["HD100:Working:Mathematica:Data"];
dir  =  "HD100:Working:Mathematica:Data:";
meshfilename  =  "truss1";
dir<>meshfilename;
{nP,nDegP,nE,nMate,nPFixed,nPLoaded,
     coord,cnnct,nPE,mateE,danmenE,
          pFixed,kindFixP,valType1,
               pLoaded,loadAtP}  =  inputMeshData[%];

drawMesh[coord,nE,cnnct];
drawPoints[coord];
pointNumber[coord];
elementNumber[coord,nE,cnnct,nPE];
Show[  %%%,Graphics[{%%%%,%%,%}],
          AspectRatio  ->  Automatic,
          PlotRange  ->  All,
          Axes  ->  None,
          DisplayFunction  :>  $DisplayFunction  ];
```

図３　変位図のプログラムの１部分

弾性解析の後処理プログラムとしては、等高線図やベクトル図（図４）を描くプログラムと、３次元でのメッシュを描くプログラム（図５）とを用意した。後者は３次元でのモデル図の他に、２次元モデルでの応力分布図や平板の変位図などに応用することができる。Mathematicaでは３次元の図を描く場合も座標を２次元に変換する必要がなく、そのまま３次元の形で扱ってやればよいので、プログラムが楽に書ける。また、簡単な使い方で視点を移動させて描き直すことができるので、モデルや結果の全体像を把握するのに便利である。

一連の図をアニメーションとして見せることができるので、振動解析などの時間的な変化や、有限変位解析などのステップごとの変形を追っていくことも可能である。

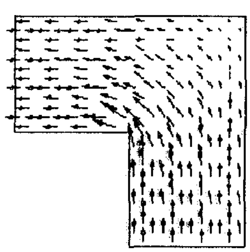

図４　ベクトル図

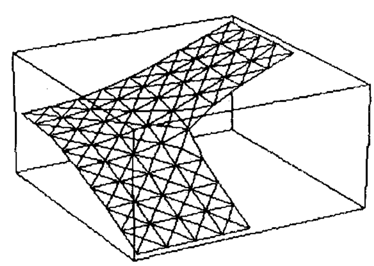

図５　３次元メッシュ図

5．まとめ

以上、数式処理言語Mathematicaを、有限要素法における構造解析での剛性マトリックスの式の導出、数値計算および後処理に応用してみた。構造解析を学んでいくには、有限要素法の流れと、解析対象によって剛性マトリックスが変わることを理解し、解析結果を十分に検討していくことが必要である。Mathematicaはこの構造解析における教育への応用の可能性があるといえる。

参考文献

(1) N. ブラックマン：Mathematica　実践的アプローチ，トッパン，1992. 7.

(2) R. E. クランドール：Mathematica　理工系ツールとしての，トッパン，1991. 11.

(3) Toshio Mura, Tatsuhiko Koya：Variational Methods in Mechanics, Oxford University Press, 1992.

(4) 安武健司，加川幸雄：数式処理言語Mathematicaによる代用電荷法逆解析－ポテンシャル問題の場合，境界要素法研究会境界要素法論文集，第10巻，pp.71-76, 1993. 12