

3次元主応力表示グラフィックスプログラムの開発

佐賀大学 学生員○ 井崎 博史

佐賀大学 正員 荒牧 軍治

佐賀大学 正員 佐々木広光

1 緒言

コンピュータの急速な発達により有限要素法解析は2次元問題から3次元問題へと移行しつつある。我々の研究室では、佐賀医科大学口腔外科との共同研究で、天然歯とインプラント（人口歯根）周辺組織を汎用有限要素法解析プログラム（FINAS）を用いて応力解析を行い、直応力3個、せん断応力3個を得ているが、これらの値から応力の向きと大きさを考える事は非常に難しい。これら6個の値から直応力を求めれば主応力についての情報は容易に得られる。しかしその応力の向きを考える場合は主応力を3次元的に表示する工夫が必要ようである。

本研究は主応力の大きさと向きを3次元グラフィックスを用いて表示する方法を検討したものである。有限要素法解析で得られた6個の応力を代入すれば、全体座標系における主応力の大きさと向きを回転を行う事により容易に理解する事ができる。

また土木では3次元構造物を2次元として取り扱っているが、最近では基礎あるいはダム周辺の応力解析が2次元から3次元解析に進みつつある事からみても、今回の研究がそれらの足掛かりになるだろう事も本研究の意義である。

2 3次元主応力とその方向余弦の算出

$$\left. \begin{aligned} \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 &= 0 \\ I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x \\ &\quad - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 \\ &\quad - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l_1 + \tau_{xy}l_2 + \tau_{zx}l_3 &= 0 \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma)l_2 + \tau_{yz}l_3 &= 0 \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{xy}l_2 + (\sigma_z - \sigma)l_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

$l_1 \sim l_3$; σ_1 の方向余弦 : $m_1 \sim m_3$; σ_2 の方向余弦 : $n_1 \sim n_3$; σ_3 の方向余弦

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ の6個の直応力及びせん断力が与えられると、3個の主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は3次方程式(1)の3実根として与えられる。(σ_1 : 代数的最大主応力, σ_3 : 代数的最小主応力)

3主応力が作用している主応力軸は互いに直角であり、各々の軸の方向余弦は、式(3)と式(2)に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の値を代入する事より得られる。

3 主応力の3次元グラフィックス表示法

3次元グラフィックスでは透視投影変換まで行うのが通常であるが、投影変換の中でも遠近感をつけない平行投影（軸側投影）によって座標変換するまでにとどめた。何故なら各要素は実際には小さなものであって、それに遠近感をつける事は無意味であるだけでなく、応力状態の視角的把握を困難にし、平行投影変換は処理が簡単だからである。

その平行変換のマトリックスを式(4)に示した。なお、3軸回りの回転においてX軸→Y軸の順に回転させるか、あるいは逆にY軸→X軸の順に回転させるかによって違いが生じるが、ここではX軸→Y軸→Z軸の

順に回転にした。

$$[X, Y, Z] = [x, y, z] T_x * T_y * T_z \text{---(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_x * T_y * T_z$$

T_x : X軸回りの回転マトリックス T_y : Y軸回りの回転マトリックス T_z : Z軸回りの回転マトリックス
 (x, y, z) : 回転前の座標 : (X, Y, Z) : 回転後の座標

写真1はインプラント（人工歯根）周辺組織の3次元有限要素法により応力解析を行った計算結果を、パーソナルコンピュータにより各要素の3主応力計算を行い、2次元グラフィックスにより表示したものである。この2次元グラフィックスプログラムはXY断面・XZ断面・YZ断面を各要素の3主応力の中で絶対値が最大である最大主応力だけを表示するものである。

写真2に示すように正六面体を8つの領域に区切り、各々の主応力がどの領域含まれるかを分かりやすくした。視点座標軸の色を替えX, Y, Z軸の正方向を明示した。問題は主応力をどのように表示するかであるが、その大きさと方向を線分で表示すると、最大主応力が回転角の入力によって、CRT上では3主応力の中で最小の線分長さになる事がある。これを解消するために線分の変わりに正四角錐を使って表示した。主応力が圧縮の場合は正四角錐の頂点を原点方向に向け、引っ張り場合はその逆とした。

まず算出した主応力の絶対値に方向余弦を乗じて、主応力の大きさと方向を含めた原点からの座標値(以下A点とする。)を求める。そしてA点と原点を結んだ線分を母線にして正四角錐を描く。しかしA点を中心としていきなり正方形を描くと処理が難しい。そこで回転変換によりA点を視点座標系の座標軸上に変換しA点回りに正方形の4頂点を設けた。このとき正方形の1辺は各主応力の大きさに比例させた。そしてA点をその4頂点とまとめてもとのA点の座標に戻せば良い。3主応力が作用している主応力軸は互いに直角であるから、そのうちの2つを視点座標軸上に変換すれば、残りの1つも座標軸上に変換される事になる。例えば、この変換のためX軸を θ_x 回転→Z軸を θ_z 回転させたとすれば、もとの座標値に再変換するにはZ軸を $-\theta_z$ 回転→X軸を $-\theta_x$ 回転すれば良い。

正四角錐を使用する事によって向きと大きさが理解し易くなるが、それに加えて大きさの順に色分けをして更に視覚的に分かり易くした。

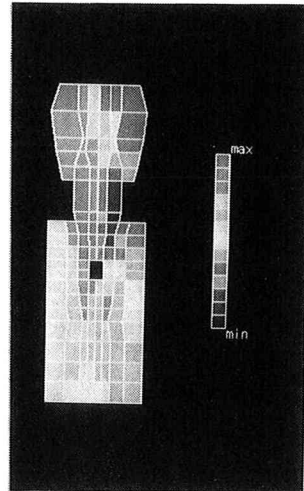


写真1 インプラントの応力分布

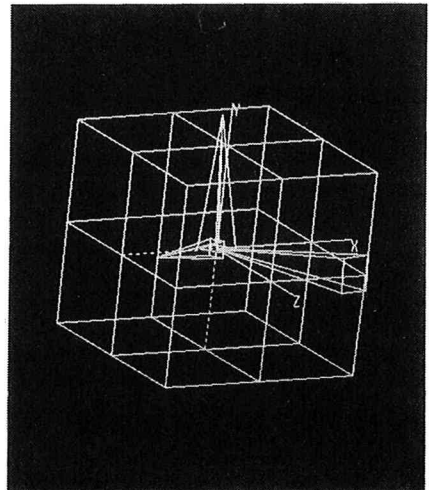


写真2 1要素の3次元主応力