

数値計算上に見られるフラクタル性

九州大学 正会員 ○丸山義一

九州大学 正会員 J. Bolander Jr.

1. 緒言

従来の幾何学や微分学で取り扱うことのできない形状に関して新しい研究が進められている。積乱雲や海岸線、山の起伏や川の形、さらに、動物体内の血管などの枝分かれ構造、金属表面のささくれなど、自然界に存在する自己相似性をもつ形状はフラクタルと呼ばれ、接線すなわち微分の定義が不可能な形であることが明らかになりつつある。

そこで本研究では、数値計算とフラクタルの関係について考察することを目的とし、その第1段階として形状修正問題を例にとる。具体的には、平面応力状態の弾性板構造を対象とし、それを構成する有限板要素がフォン・ミーゼスの降伏条件を満足するように板厚を変化させ、構造の形状修正を行なう。さらに、得られた板厚分布のフラクタル性について言及する。

2. 板厚修正手法

図-1のような十字方向に等しい引張力($p = 25 \text{ t}$)を受ける初期板厚 1 cm の正方形板の平面応力問題を有限要素法により解析する。材料は等質等方性を有する鋼(ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 降伏応力 $\sigma_y = 3600 \text{ kgf/cm}^2$)を想定する。板の縦横を40分割し、4積分点を有する4節点アイソパラメトリック平面要素を用いる。

図-2は板厚修正手順を示している。最初のFEM構造解析までを第1サイクルとし、次に、各積分点における応力を算出し、板厚が修正された構造のFEM解析までを第2サイクル、以下同様に第3、第4サイクルと修正計算を繰り返す。ここでは、板厚の修正の際フォン・ミーゼスの降伏条件を用いるものとする。具体的には、各積分点におけるせん断応力強度

$$\tau_s = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1)$$

ここに、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主応力が、降伏せん断応力強度

$$\tau_v = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y \quad (2)$$

に収束するように板厚の修正を行う。ただし、大幅な板厚の修正は、その周囲の応力およびひずみを大きく変化させるので、本法では板厚の修正量を前サイクルの $\pm 10\%$ 以内に制限するものとする。

3. 板厚修正結果

図-3は、横軸にサイクル数 S 、縦軸に全積分点におけるせん断応力強度の最大値をとり、収束状況を示したものである。第11サイクル以降、せん断応力強度の変化は小さくなっている。図-4は、第1, 5, 10, 20, 30サイクルの板厚分布図を示している。これらの図は、最小2乗法を用いて積分点の板厚を節点の板厚に変換して描かれたものである。

4. フラクタル次元解析

3次元空間を一樣な箱に分割し、対象の一部を含むような箱の個数を数える方法により、フラクタル次元を求める。図-5のような箱を考え、箱の相似性の長さの比を r とし、板構造全体を覆うような一樣な箱の個数を $N(r)$ とする。ここで、 $r = 1$ の場合の箱の底面積は、板要素の $1/4$ の大きさとし、その厚さ t には初期板厚 t_0 に比べて十分小さな長さを設定した。

ここに、

$$a = r \frac{L_x}{n_x}, \quad b = r \frac{L_y}{n_y}, \quad t = r \frac{t_0}{10000}$$

ただし、板構造に関して、 x, y は面内の直交座標、 L_x, L_y ($= 1 \text{ m}$) は x, y 方向の寸法、 n_x, n_y ($= 80$) は x, y 方向の積分点の数である。

いま、 r を変化させたときに、

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (3)$$

すなわち

$$\log N(r) = -D \log r + C \quad (4)$$

なる関係が成りたてば、板厚分布はフラクタル性を有し、その次元は D である。図-6 は、第30サイクルの板厚分布図について、 $\log N(r)$ と $\log r$ の関係 ($r = 1, 2, 4, 8, 10, 16$) をプロットしたものである。両軸の値がほぼ直線関係にあるので、板厚分布はフラクタル性を有するものと考えて式(4)からフラクタル次元を求めれば、 $D = 2.84 \dots$ が得られる。

5. 結語

本論で得られた構造はフラクタル性を有すると思われるが、これは解析過程におけるフィードバックに起因しているのではないかと考えている。今後は、より現実に近い解析モデルを作成するために、材料の微細構造および種々の物理的条件などを考慮する必要がある。また、フラクタル性を深く探求するためには、構造修正過程だけでなく成長過程をも考慮すべきであろう。

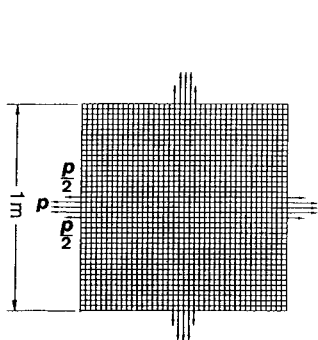


図-1 解析モデル

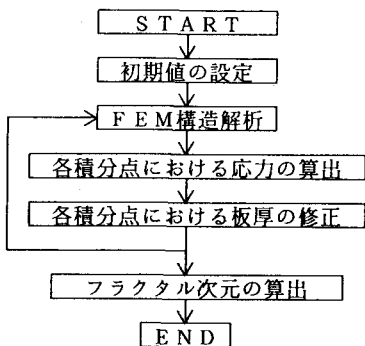


図-2 板厚修正手順

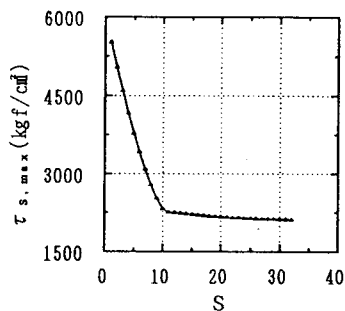


図-3 せん断応力強度の収束曲線

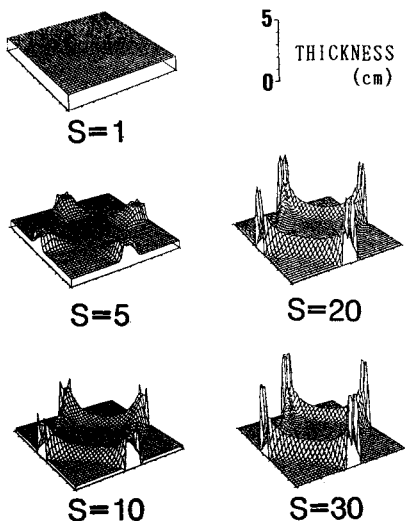


図-4 板厚修正過程

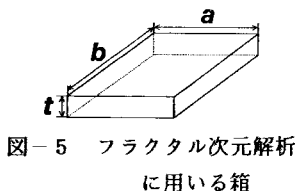


図-5 フラクタル次元解析に用いる箱

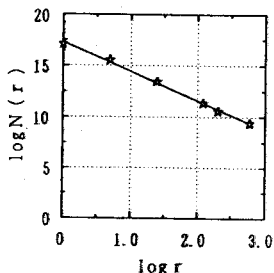


図-6 $\log N(r) - \log r$ の関係