非比例荷重を受ける骨組構造の最適塑性設計

九州共立大学工学部　正員　三原徹治
アルファコンサルタント㈱　正員　千々岩浩巳
九州共立大学工学部　学生員○木村貴之
〃　学生員　福本善之

1. 緒言

構造物の安全性を設計基準とする最適塑性設計法に関する従来の研究は、所望の安全性を保証したうえで構造全重量の最小化を図る最小重量設計法[1]、ある構造全重量のもとで最も安全性の高い断面配分を求める最大荷重設計法[2]、より安全でしかもより経済的な設計を求める２目的最適設計法[3]に大別されるが、いずれもその作用荷重系が比例荷重の仮定に立脚している。しかし、一般に構造物は多種多様な作用荷重を受け、比例荷重の仮定が必ずしも妥当ではない場合もある。

本研究は、２目的最適設計法[3]と一般的な塑性解析法[4]との統合と位置づけられる「最適塑性設計法の一般化」を企図するものである。その方法は、作用荷重系を複数の比例荷重系と固定荷重系を組合せた非比例荷重系と仮定したうえで非比例荷重下の最適塑性設計基本式を多目的線形計画問題として定式化し、その解法として原多目的問題を単一目的線形計画問題に変換した限定最大荷重設計法と名付けた手法を提案する。

なお、本研究においては比例荷重の仮定を除き慣用の剛塑性理論にしたがう。

2. 非比例荷重下の最適塑性設計基本式

構造物に作用する非比例荷重系が、変動を考慮しない固定荷重系 F^f と荷重量の変動を考慮する全Ｉ個の変動荷重系の線形結合であり、しかも各変動荷重系が基本となる荷重ベクトル F_i と変動大きさを規定する荷重係数 α_i の積で表される[4]と仮定すれば、安全性と経済性を同時に追求する最適塑性設計基本式は塑性解析の下界定理から式(1)のように定式化することができる。ここに、式(1)は平衡条件（式(1c)）、降伏条件（式(1d)）および設計変数Ｘに関する上下限値制約（式(1e, f)）を満足する静的許容な設計の中から式(1a)に示す構造重量Ｗの最小化と式(1b)に示す全Ｉ個の荷重係数 α_i の最大化を同時に追求する設計を求める多目的線形計画問題を示している。

未知数：	$W,\ \mathbf{X},\ \alpha_i (i=1..I),\ \mathbf{Q}$	
目的関数：	$W=\mathbf{a}^T\mathbf{X} \rightarrow \min.$	(1a)
	$\alpha_i \rightarrow \max. \quad (i=1..I)$	(1b)
制約条件：	$\mathbf{C}^T\mathbf{Q}-{}_i\Sigma\,\alpha_i \mathbf{F}_i=\mathbf{F}^f$	(1c)
	$\mathbf{N}^T\mathbf{Q}-\mathbf{R}^T\mathbf{X}\leq \mathbf{0}$	(1d)
	$\mathbf{X}^L\leq\mathbf{X}\leq\mathbf{X}^U$	(1e, f)

ただし、$\mathbf{a}$ は重量換算係数ベクトル、$\mathbf{C}$ は適合マトリックス、$\mathbf{Q}$ は内力ベクトル、$\mathbf{N}$ は降伏面における単位法線マトリックス、$\mathbf{R}$ は塑性容量の１次微係数マトリックス、$\mathbf{X}^U$, $\mathbf{X}^L$ は設計変数ベクトル $\mathbf{X}$ の上・下限値ベクトル、上付添字Ｔは転置を示す記号であり、${}_i\Sigma$ はｉに関する総和を示す。

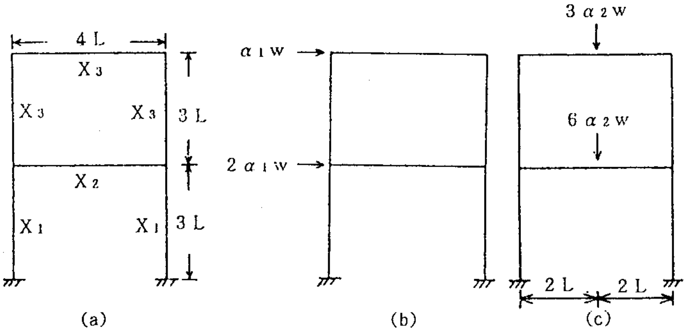
3. 最大荷重設計法を適用したPareto解探索手法

式(1)に示す設計基本式の各目的は相互にトレードオフの関係にあるため、その解は一意的に定まらずPareto解集合として得られる。Pareto解を求める方法には、例えば満足化トレードオフ法におけるスカラ化手法[5]などの適用も考えられるが、本研究ではある一定の構造重量におけるPareto解集合を探索するため最大荷重設計法[2]を基礎とし、式(2)に示す方法を用いた。式(2)は、着目する１個の変動荷重系 $\alpha_k F_k$ を除く他の変動荷重系についてはその荷重係数値を固定し、同時に固定した構造重量値 W^f のもとで α_k の最大化を図る単一目的線形計画問題であり、固定する変動荷重系の荷重係数値を適切に選定すれば任意の W^f 値におけるPareto解をＬＰにより容易に求めることができるので、限定最大荷重設計法と呼ぶことにする。ただし、α^f_i は固定するｉ番目の変動荷重系の荷重計数値、${}_{i,i\neq k}\Sigma$ は $i\neq k$ なるｉに関する総和を示す。

未知数：	$\mathbf{X},\ \alpha_k,\ \mathbf{Q}$	
目的関数：	$\alpha_k \rightarrow \max.$	(2a)
制約条件：	$\mathbf{C}^T\mathbf{Q}-\alpha_k\mathbf{F}_k=\mathbf{F}^f+{}_{i,i\neq k}\Sigma\,\alpha^f_i\mathbf{F}_i$	(2b)
	$\mathbf{N}^T\mathbf{Q}-\mathbf{R}^T\mathbf{X}\leq\mathbf{0}$	(2c)
	$\mathbf{X}^L\leq\mathbf{X}\leq\mathbf{X}^U$	(2d, e)
	$W=\mathbf{a}^T\mathbf{X}=W^f$	(2f)

4．数値計算例によるPareto解特性の検討

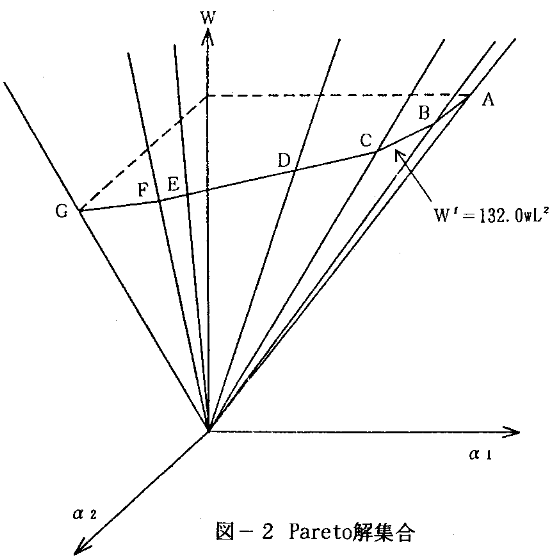
簡単な骨組構造物を対象とした数値計算例からPareto解特性について検討するため、図－1に示す2変動荷重系構造のPareto解集合を限定最大荷重設計法を用いて求めた。ただし、基本的な検討のため$\mathbf{F}^f=\mathbf{0}$，$\mathbf{X}^L=\mathbf{0}$，$\mathbf{X}^U=\infty$を設定し、固定荷重系および設計変数の上・下限値制約の影響を排した。



図－1　2層1スパンラーメン（2変動荷重系）
(a)構造形式 (b)第1変動荷重系 (c)第2変動荷重系

$W^f=132.0wL^2$と固定したときのPareto解集合（等重量Pareto解集合）を$\alpha_1\sim\alpha_2\sim$W空間で表示すると、図－2の点A～Gを結ぶ6線分で形成される2次元凸多面形が得られた。W^f値を順次変化させ、それぞれの等重量Pareto解集合を求めると、$W^f=132.0wL^2$の場合の等重量Pareto解集合と相似な凸多面形が得られ、その大きさはW^f値に比例することがわかった。よって、本例における全体Pareto解集合は、各等重量Pareto解集合のW軸方向の包絡として、図－2に示すような原点を始点とする半無限平面群で構成されることになる。

また、2変動荷重系構造を対象とした本例の等重量Pareto解集合が2次元凸多面形であることから、一般にn変動荷重系の等重量Pareto解集合はn次元空間における凸多面体で表されることが予想される。すなわち、$n>4$の場合には図－2のように視覚的に全体Pareto解集合を特定することは不可能となり、満足化トレードオフ法におけるスカラ化手法[5]などの適用の検討が必要である。



図－2 Pareto解集合

5．結　言

(1)作用荷重系を複数の比例荷重系と固定荷重系を組合せた非比例荷重系と仮定したときの最適塑性設計基本式を、塑性解析の下界定理に基づき多目的線形計画問題として定式化した。

(2)上記設計基本式の解法として従来の最大荷重設計法の考え方を援用することにより、原多目的問題を単一的線形計画問題に変換した限定最大荷重設計法と名付けた手法を提案した。

(3)簡単な骨組構造物の数値計算例から原多目的問題の解集合（Pareto解）特性を数値的に検討した結果、固定荷重系および設計変数の上・下限値制約の影響が無視できるとき、原多目的問題の全体的なPareto解集合は、原点を始点とし、その大きさが構造重量に比例する半無限超平面群で形成されることがわかった。

参考文献 1)例えば、石川他:入門・塑性解析と設計法, pp. 141～162, 森北出版, 1988. 5.　2)三原他:骨組構造物の塑性最大荷重設計法に関する二、三の考察, 九州共立大学工学部研究報告, 第12号, pp. 129～134, 1988. 3.　3)三原, 千々岩他:骨組構造の塑性設計における多目的最適化に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 477～486, 1992. 3.　4)三原, 千々岩他:多目的計画法を用いた骨組構造の塑性解析に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 467～476, 1992. 3.　5)中山:多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案, 計測自動制御学会論文集, 第20巻, 第1号, pp. 29～35, 1984. 1.