

カルマンフィルターによるカオス的な時系列の数学モデルの推定と予測について

九州大学工学部 学生員 ○松本 実
 九州大学工学部 正 員 河村 明
 九州大学工学部 正 員 神野 健二
 九州大学工学部 許 士国

1. はじめに 多くの水文時系列は、例えば、大局的なパターンは数学的法則に従っているが、2度と同じ値を繰り返さないという非周期性、またある時点でほとんど同一の値をとっていても先に行くにしたがってそのわずかな誤差が倍増してしまうという初期値に対する鋭敏な依存性など非線形のカオスの特徴を有していると考えられる。この場合、従来確率過程的に取り扱われていた時系列を、カオス論的な取扱いによりある程度物理的に解釈し、時系列の数学モデルの推定及び精度良い予測を行うことが可能であると考えられる。本報では水文時系列へのカオス理論の適用の第1段階として、典型的なカオス的な時系列として知られるローレンツ方程式を対象として、まずこの非線形微分方程式のパラメータを未知として、非線形方程式をTaylor展開し1次項までを考慮する拡張カルマンフィルターを適用する。そして各時点毎に逐次パラメータを同定しながらその数学的モデルを推定すると同時にカオスの挙動を示す時系列の予測を行い拡張カルマンフィルターのカオス時系列への適用性及び特性について検討する。

2. ローレンツ方程式 ローレンツ方程式は1963年にアメリカの気象学者であるE.ローレンツにより導いた最初のカオス時系列であり、式(1)で示される3元連立常微分方程式である。

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = Rx - y - xz, \quad \dot{z} = -b z + xy \quad \dots (1)$$

ここに、 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ は x, y, z の時間 t に関する微分、 σ, R, b はパラメータであり、系の挙動に非常に敏感に作用する。カオス的な現象の例としてよく用いられるのは、 $\sigma=10, R=28, b=8/3$ である¹⁾。さてここで、時間間隔 $\Delta t=0.005$ とし、 $t=t_0=0$ における x, y, z の初期値 $(x(0), y(0), z(0))=(10, 10, 10)$ として、Runge-Kutta-Gill法により式(1)を10000ステップ程数値計算で解いた結果の50000ステップまでの時系列を図-1に、また位相空間上への10000ステップまでのプロットを図-2に示す。図-2の位相空間上での挙動は典型的なストレンジアトラクターであり、ローレンツアトラクターと呼ばれるものである。

3. カルマンフィルターによる定式化 カルマンフィルターは、式(2)で表される状態方程式により遷移するシステム状態量 X を推定する理論である。状態量 X は式(3)の観測方程式を通してのみ観測される。

$$X(k+1) = \Phi(k)X(k) + \alpha(k) + u(k) \quad \dots (2)$$

$$Y(k+1) = H(k+1)X(k+1) + \beta(k+1) + w(k+1) \quad \dots (3)$$

ここに、 k :時点、 X :システム状態量ベクトル、 Φ :状態遷移行列、 α :定数ベクトル、 u :システム雑音ベクトル、 Y :観測量ベクトル、 H :既知の観測行列、 β :定数ベクトル、 w :観測雑音

状態方程式(2)と観測方程式(3)が定式化されれば、状態量 X の最適推定量 $\hat{X}$ および観測量 Y の予測は、カルマンフィルターのアルゴリズムに従い逐次求められる²⁾。さてカルマンフィルターで推定すべきシステム状態量として式(1)における x, y, z および定数 σ, R, b をとる。すなわち $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T = [x \ y \ z \ \sigma \ R \ b]^T$ (T :転置)とする。 X の遷

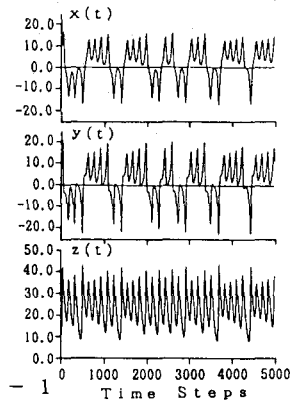


図-1 ローレンツ方程式の時系列

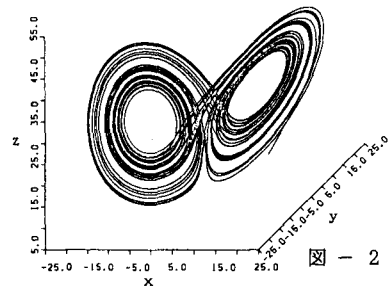


図-2 ローレンツ方程式の位相空間上へのプロット

ローレンツ方程式の

移方程式は $F(X)$ を X のベクトル関数 $F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T$ とすると式(1)より次式で表される。

$\dot{X} = F(X) \cdots (4)$ すなわち $\dot{x}_1 = f_1(X) = x_4(x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = f_2(X) = x_5 x_1 - x_2 - x_1 x_3$, $\dot{x}_3 = f_3(X) = -x_6 x_3 + x_1 x_3$, $\dot{x}_4 = f_4(X) = 0$, $\dot{x}_5 = f_5(X) = 0$, $\dot{x}_6 = f_6(X) = 0 \cdots (5)$ ここで、非線形ベクトル関数 $F(X)$ を X の近傍 X^* において Taylor 級数展開し、1 次の項までとり線形化すると $F(X) = J(X^*) + B(X^*)X^* \cdots (6)$ ここに J : ヤコビアン行列、 $B(X) = F(X^*) - J(X^*)X^*$

$\cdots (7)$ となるので、式(4)は次式となる。

$X = J(X^*)X + B(X^*) \cdots (8)$ 式(8)は線形微分方程式であるが、計算機での計算を容易にするため式(8)を時間間隔 Δt で次の差分方程式に変換する³⁾と、次式のように式(2)の状態方程式が得られる。

$X(k+1) = \Phi(X^*)X(k) + \Gamma(X^*)B(X^*) \cdots (9)$

ここに、 $\Phi(X^*) = e^{J\Delta t}$

$$= I + J\Delta t + \cdots + (J\Delta t)^m/m! + \cdots \cdots (10)$$

$$\Gamma(X^*) = (e^{J\Delta t} - I)J^{-1} = \Delta t [I + J\Delta t/2! + \cdots + (J\Delta t)^{m-1}/m! + \cdots] \cdots (11)$$

なお、本報では、式(10)、(11)の4次まで取り入れた。次に観測方程式(3)については、ここでは、 x_1 要素、すなわち時系列 x のみが観測されるとすると $H = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, $\beta = 0$ となる。以上のように拡張カルマンフィルタを定式化し、状態量 X の初期推定値には真値の50%を与え、カルマンフィルタのシステム雑音 u の共分散は0、観測雑音 w の分散は0.01として時系列 x のみの観測から時系列 x, y, z の1ステップ^{*}及び5ステップ^{*}先の予測、またパラメータ σ, R, b の同定を500ステップ^{*}行行った結果を図-3に示す。

3. 考察 図-3よりパラメータの σ, R, b とも初期推定誤差は速やかに補償され真値を精度良く同定している。また観測時系列 x 、非観測時系列 y, z の1および5ステップ^{*}先の予測も非常に精度よく行われている。カオス時系列の特徴として初期値に敏感であることや、予測が難しいことが挙げられるが、5ステップ^{*}($t=0.025$)先程度の短時間であれば拡張カルマンフィルタで非常に精度よく行えることが明らかになった。

4. むすび 本報では拡張カルマンフィルタによるカオス時系列のモデル推定と予測のための第1段階として、ローレンツ方程式を対象として検討を行った。その結果、時系列がカオス的であっても拡張カルマンフィルタにより精度よく予測や同定が行えることを示した。ローレンツ方程式のパラメータは未知として取り扱ってはいるが、カオスを引き起こす微分方程式の構造は既知として定式化を行っている。しかし実際の水文時系列においてはその時系列を生み出す構造は未知と考えられるので、今後は数学モデルとして、カオスの挙動を引き起こす一般的な非線形項を含んだ常微分方程式を仮定して拡張カルマンフィルタの適用を試みるつもりである。

参考文献 1) 武者利光 監訳・橋口住久 訳: 非線形力学とカオス, オーム社, 1988年7月。2) 河村明・神野健二・上田年比古・土井敬介: 上水道配水管網系の節点需要量のオンライン予測に関する研究, 土木学会論文集, No. 405号/II-11, pp. 245~254, 1989年5月。3) 星清: 洪水予測システムの基礎的検討(1), 土木試験所月報, No. 385, p. 42~48, 1985年6月。

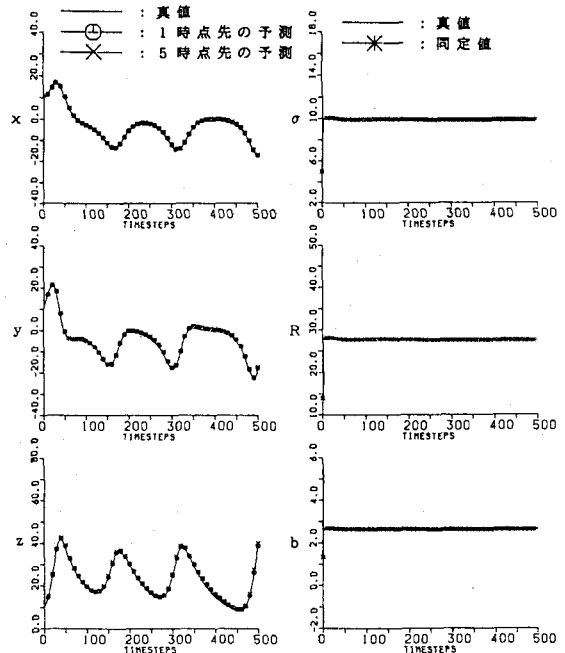


図-3 ローレンツ方程式の拡張カルマンフィルタによる
時系列の予測およびパラメータの同定