土木学会西部支部研究発表会(1993.3)

ＳＯＷＭＡＣ法の多次元問題への適用について

九州大学　正員○朝位　孝二
九州大学　正員　小松　利光
佐賀大学　正員　大串　浩一郎

1．はじめに

著者らは移流項のための高精度計算スキームとしてSOWMAC法を提案した[1]。このスキームは陰解法ではあるが、スキーム中に取り込む格子点の数はわずか3点であるため境界付近の取扱いが容易なものとなっている。SOWMAC法は一次元波動方程式を基礎にして導出されたスキームであるため、基本的には一次元純粋移流問題用の計算方法である。しかしながら、前報[2]では、若干の工夫によりSOWMAC法は多次元移流拡散問題に容易に適用できることを報告した。前報では、SOWMAC法の多次元移流拡散問題への拡張の概念と計算手順の説明が不十分であったので、ここで詳細に報告する。

2．多次元移流拡散問題への適用

2.1　オペレーター分離法について

二次元移流拡散方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v\frac{\partial \Phi}{\partial x}=D_x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \tag{1}$$

オペレーター分離法（Split Operator Approach）[1]に基づいて（1）式を次のように分離する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=D_x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \tag{3}$$

（2）式は移流方程式、（3）式は拡散方程式である。この手法の利点は移流方程式と拡散方程式を全く別個に解くことになるので、それぞれに最適な計算スキームを用いることができる点にある。極端な例を挙げれば、移流方程式は差分法で、拡散方程式は有限要素法で解くことも可能である。

（2）式にさらにオペレーター分離法を適用すれば（4）式、（5）式のようにｘ方向、ｙ方向の移流方程式に分離することができる。（4）式、（5）式は見かけ上一次元移流方程式となっているのでSOWMAC法をそのまま適用することができる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+v\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0 \tag{5}$$

計算手順としては、同一タイムステップ内で（4）式を解き、その解を用いて（5）式を解く。引き続いて、その解を用いて（3）式を解いてn+1タイムステップの解とすればよい。

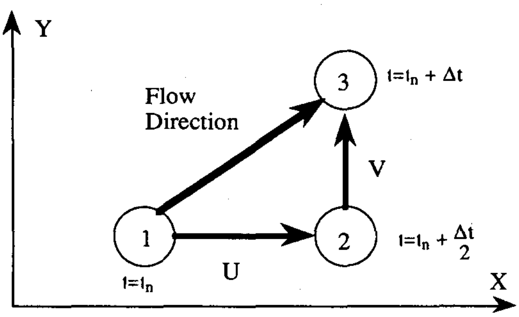
ここでオペレーター分離法の物理的な意味を考察する。現象論的には移流と拡散は同時に発生しているが、短い時間間隔の間で、まず拡散を受けずに移流のみが行われ、その後移流が行われずに拡散だけが発生していると解釈できる。また移流においても、ｘ方向への移流が行われその後ｙ方向への移流が行われる。しかしながら、時間進行を考えるとｘ方向への移流が終了しｙ方向への移流が開始する時刻、あるいは移流現象が完了し拡散が始まる時刻はダミー時刻であり物理的に意味のある時刻ではない。したがってオペレーター分離法は計算手法としては便利な手段ではあるが、その物理的意味が明確ではない。

2.2　時間ステップ内で現象を分離する方法

ここで（2）式で示される二次元純粋移流方程式について考えることとする。この式は図－１に示すよう

に t ＝ t_n 時刻に地点１にあった物質が t ＝ t_n ＋Δ t 後に地点３に運ばれる移流現象を記述している。実際の現象としては地点１にあった物質は直接地点３に向かって運ばれるが、ここで輸送経路を実際の現象から変えて、いったん x 軸に並行にΔ t ／2時間後に地点２に運ばれ､その後Δ t ／2時間かかって y 軸に並行に地点３まで輸送されるものとする。この現象を記述する方程式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial t}+2u\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \quad \text{when } t_n\leq t\leq t_n+\frac{\Delta t}{2} \\
&\frac{\partial\Phi}{\partial t}+2v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \quad \text{when } t_n+\frac{\Delta t}{2}\leq t\leq t_n+\Delta t
\end{aligned}
\qquad (6)
$$



図－１　二次元移流経路

（2）式と（6）式は数学的には適合しないが t $_n$ ＋Δ t 時の解は一致する。SOWMAC法を（6）式の離散化に適用すると次のようになる。

$$F\left(\Phi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}},\ \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},\ \Phi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}},\ \Phi_{i-1,j}^{n},\ \Phi_{i,j}^{n},\Phi_{i+1,j}^{n},\alpha\right)=0,\ \ \alpha\equiv\frac{2u\frac{\Delta t}{2}}{\Delta x}=\frac{u\Delta t}{\Delta x} \qquad (7)$$

$$F\left(\Phi_{i,j-1}^{n+1},\Phi_{i,j}^{n+1},\ \Phi_{i,j+1}^{n+1},\ \Phi_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}},\ \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},\ \Phi_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}},\ \beta\right)=0,\ \ \beta\equiv\frac{2v\frac{\Delta t}{2}}{\Delta x}=\frac{v\Delta t}{\Delta x} \qquad (8)$$

（7）式を j を固定して i について解き、j を一つ進めて再び i について解いて行けば n +1／2ステップの解を得る。同様にして（8）式は i を固定して j について解いて行けばよい。

三次元移流拡散問題の場合も同様に考えて、 x 方向の移流、 y 方向の移流、 z 方向の移流そして拡散がそれぞれΔ t / 4 時間間隔で順次行われると考えればよい。これをフローチャートに示したのが図－２である。

それぞれの現象が計算格子時間間隔Δ t 間内で等時間間隔に発生すると仮定した。しかしながら、それぞれの現象を規定する式を解く際に、それらの式を解くための計算時間間隔を気にする必要はない。どのような時間間隔であろうとこの時のクーラン数、拡散数は、計算条件として与えられる計算格子間隔で定義される値と同じになるからである。

３．結論

２章で述べた方法は与えられた基礎方程式と適合していない方程式を解いていることになる。しかしながら物理的に考えれば計算時間間隔ごとにあらわれる解は与えられた基礎方程式の解と一致する。ここにこの解法の妥当性がある。

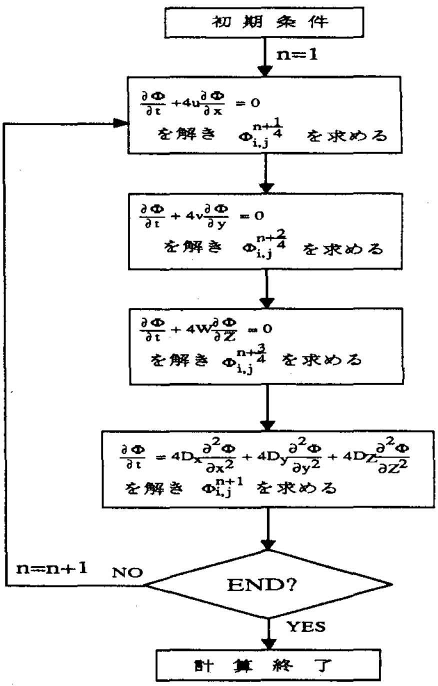


図- 2　三次元移流拡散方程式の数値計算の流れ図

４. 参考文献

（1）小松ら：土木学会論文集、No.456/Ⅱ-21、pp.37-46､1992

（2）朝位ら：平成3年度西部支部講演概要集、pp.256-257