新しい高精度補間多項式の応用に関する研究

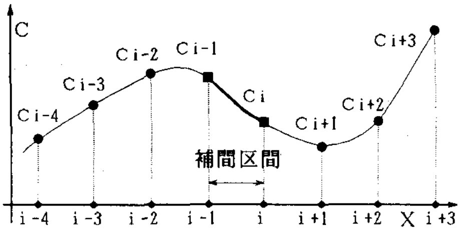
九州大学大学院○学生員 水沼 道博
九州大学工学部 正 員 朝位 孝二
九州大学工学部 正 員 小松 利光

1．はじめに

実験や実測で得られるデータは離散的であることが多く、各データ間の値を求める補間法は、理工学の分野においても広く用いられている手法の一つである。補間法は種々提案されているが、その中でも各データ点間を区分多項式で内挿するSpline関数が最も広く使用されている。しかしながらSpline曲線は、補間多項式を求める際にデータ個数と同数元の連立方程式を解く必要があり、データの数が増大すると、コンピューターの容量や計算時間に問題が生じてくる。そこで著者らは陽的な補間多項式で、かつSpline関数と同程度の補間精度をもつ計算法（ＩＮＤＵＳ法）を開発した[1]。本研究は、ＩＮＤＵＳ法による補間多項式を、数値積分，数値微分法として応用することを試み、その精度を検証するものである。

2．ＩＮＤＵＳ法による補間多項式とその積分・微分形

ＩＮＤＵＳ法は、等間隔にデータ点が与えられた場合に、各データ間をそれぞれ３次の区分多項式で表現する補間法であり、図－１の記号を用いるとi-1～i区間をＩＮＤＵＳ法で補間するためには、i-4～i+3点までの計８点の値が必要になる。ＩＮＤＵＳ法の導出の過程は、文献 1)を参照してもらうことにして最終的な式形を示すと次のようになる。



図－１ 記号説明

$$Y_i(\beta)=-A_i\beta^3+B_i\beta^2+C_i\beta+D_i \tag{1}$$

ここで

$$\begin{cases} A_i=-0.02817C_{i-4}+0.1639C_{i-3}-0.60755C_{i-2}+1.2004C_{i-1}-1.2004C_i \\ \qquad +0.60755C_{i+1}-0.1639C_{i+2}+0.02817C_{i+3} \\ B_i=0.05633C_{i-4}-0.3559C_{i-3}+1.407C_{i-2}-2.2004C_{i-1}+1.4008C_i \\ \qquad -0.4115C_{i+1}0.1357C_{i+2}-0.02817C_{i+3} \\ C_i=-0.02817C_{i-4}+0.19205C_{i-3}-0.7996C_{i-2}+0.7996C_{i+1}-0.19205C_{i+2}+0.02817C_{i+3} \\ D_i=C_{i-1} \end{cases}$$

$$\beta=(X-X_{i-1})/(X_i-X_{i-1}),\quad 0\leqq\beta\leqq1$$

また (1)式により構成される区分多項式は、各データ点上で一階微分値までの連続性が保証されている。(1)式はβに関する三次多項式であるから、積分形と一階微分形は次のようにに表せる

$$\int_0^\beta Y_i(\beta)\,d\beta=-\frac{1}{4}A_i\beta^4+\frac{1}{3}B_i\beta^3+\frac{1}{2}C_i\beta^2+D_i\beta \tag{2}$$

$$Y'_i(\beta)=-3A_i\beta^2+2B_i\beta+C_i \tag{3}$$

ある積分領域における定積分を行う場合には、与えられた積分領域内の既知のデータ点で区間分割を行い、それぞれの分割区間に対して (2)式を適用すればよい。また (2)式を適用する際に積分領域外３点のデータが必要となるが、そのデータは与えられるものとする。

3．ＩＮＤＵＳ法を用いた数値積分、一階微分値の精度の検証

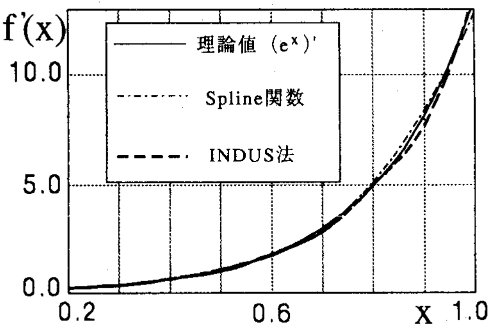
ＩＮＤＵＳ法による数値積分，一階微分値の計算精度の検証には、解析的に積分値，微分値を求めることが可能な関数を用いた。比較に用いたのは、数値積分の場合、台形項式，シンプソン則，ニュートン・コーツ3/8 乗則，Spline関数による定積分法[2]の４つで、一階微分値の場合にはSpline関数による微分法[2]を用

いた。各方法による数値積分値と理論解との精度の比較を表－１に示す。解析関数には $f(x)=x^2e^x$ を用い、積分区間内に与えるデータ点数が５点と７点の２つの場合について計算している。台形公式、シンプソン則、ニュートン・コーツ3/8 乗則の三つは、いずれもＩＮＤＵＳ法による定積分法と同様、陽形式の数値積分法であるが、理論値との計算誤差が大きい。これに対してSpline関数による定積分法は、データ点数７点の場合には積分値を精度よく近似しているが、補間区間全体を一度に解く陰形式の解法であるため、データ数が増大するとコンピューターの容量や計算時間に問題が生じてくる。

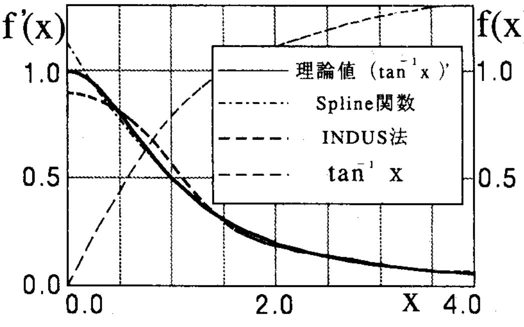
表−1 $\int_0^1 x^2 e^x dx$ の近似値

	5点	誤差	7点	誤差
理論値	0.718281	—	0.718281	—
台形測	0.760596	+0.042	0.737127	+0.0188
シンプソン則	0.718908	+0.00063	0.718407	+0.00013
ﾆｭｰﾄﾝ･ｺｰﾂ3/8則	—	—	0.718561	+0.00028
Spline関数	0.718906	+0.00063	0.718367	+0.00009
*INDUS*法	0.718072	-0.00021	0.718234	-0.00005

次に、一階微分値の精度の比較を図－２、図－３に示す。図－２は $f(x)=e^x$ の一階微分値を、Spline関数による方法とＩＮＤＵＳ法による微分計算で比較したものである。なおこの場合のデータ点数は５点であり、そのｘ座標は0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 である。勾配の大きい区間においては、いずれの方法においても多少の数値計算誤差を生じるものの、微分値を連続的に精度よく補間している。また図－３、は同様の比較を解析関数 $f(x)=\tan^{-1}x$、データ点のｘ座標を 0,1,2,3,4として行ったものである。この場合、どちらの方法においてもｘ＝０付近（変曲点付近）の精度に問題がある。Spline関数による微分値計算ではｘ＝０近辺の勾配の変化に追随しきれていない。これに対しＩＮＤＵＳ法による計算では、勾配の変化は再現しているものの、微分値そのものの誤差が大きい。



図－２　補間関数による一階微分値($f(x)=e^x$)



図－３ 補間関数による一階微分値($f(x)=\tan^{-1}x$)

４．おわりに

ＩＮＤＵＳ法による数値積分法の計算精度は、陽形式の従来の計算法よりも精度が高く、陰解法であるSpline関数を利用した方法と較べても同程度であることが分かった。しかしながら、一階の微分値の計算では、勾配の急激な変化に対する追随性に問題がありSpline関数ほどの精度は得られない。また、ＩＮＤＵＳ法では二階微分値の連続性が保証されておらず、一階微分値の補間曲線は各補間データ点上で滑らかに繋がれているわけではない。前述のように境界付近で領域外の値が３点必要となる問題もあり、補間多項式に組み込むデータ数が少なく一階微分値まで滑らかに補間する計算法の開発が今後の課題である。

＜参考文献＞　1）小松ら：高精度な陽的補間多項式の開発，水工学論文集 第37巻，1993
2）例えば、桜井　明監修：パソコンによるスプライン関数，東京電機大学出版局，1988