内湾や沿岸部における高精度拡散シミュレーションの計算手法の開発

九州大学大学院　学生員○松永　康司
九州大学工学部　正　員　小松　利光
九州大学工学部　正　員　朝位　孝二
九州大学大学院　学生員　矢野真一郎

1. はじめに

内湾や沿岸部における潮流や拡散のシミュレーションを行う場合、その対象とする流れ場や拡散場の多くが水深方向に比べて格段に大きい水平方向のスケールを持ち、かつ電算機の容量や計算時間に制約があることなどから、平面２次元のモデルが用いられることが多い。その際、流れ場における渦動粘性及び拡散係数を推定する必要があるが、最近の成果を取り入れた平面２次元の k-ε 乱流モデルを用いた解析が広く行われている[1]。しかしながら、その際用いられているモデル定数は３次元の k-ε 乱流モデルにおける値をそのまま用いている場合が多い。従って、求められる k 及び ε は厳密な意味での鉛直平均値ではない。

本研究においては、第一に、水深方向の流速、乱れエネルギー k、乱れエネルギーの散逸率 ε、及び渦動粘性係数 ν_t の鉛直分布形を仮定し、それらを鉛直方向に積分し水深平均した k, ε, ν_t を求める。第二に、それらの値を用いて k 及び ε 方程式中の定数を補正し、より厳密な平面２次元の k-ε 乱流モデルを提案する。

2. 平面２次元の k-ε 乱流モデルの導出

３次元の k-ε 乱流モデルにおける k 及び ε 方程式は以下の様に与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) + P - \varepsilon \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \qquad (2)$$

ここで、

$$P = \nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$\sigma_k=1.0,\ \sigma_\varepsilon=1.3,\ C_{1\varepsilon}=1.44,\ C_{2\varepsilon}=1.92,\ C_\mu=0.09$

さらに、渦動粘性係数 ν_t は k 及び ε を用いて以下の式で与えられる。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (3)$$

(1)~(3)式中の各項は鉛直方向に変化する二種以上の物理量の積の形となっており、これらを鉛直積分すると、一種の分散効果が生じる。従って、二次元モデルにおいては、各項の比例定数をそのまま用いることはできず、補正する必要がある。本研究では、発達した粗面開水路流において見いだされてきた流速、k, ν_t の分布形を基に、各項の補正量を求める。

１）k, ε, ν_t の鉛直平均値について

粗面開水路流における流速、$k,\ \nu_t$ の分布は以下の様に与えられる。

$$\frac{u}{u_*^2} = \frac{1}{\kappa} ln\left(-\frac{\xi}{\xi_s}\right) + A_r \quad (4) \qquad \frac{k}{u_*^2} = D\, exp\left(-\frac{\xi}{l_*}\right) \quad (5) \qquad \nu_t = \kappa u_* h \xi (1-\xi) \quad (6)$$

k-ε モデルにおいては、k, ε, ν_t の間に (3) 式の関係があるので、(3), (5), (6) より

$$\varepsilon = \frac{u_*^3\, exp(-2\xi/l_*)}{\kappa h \xi (1-\xi)} \qquad (7)$$

ここで、$\xi=z/h,\ l_*=l/h,\ \xi_s=k_s/h$　（l は乱れの減衰スケールを示す定数、k_s は相当粗度である。ここでは l の値は0.5h とした[2]。）

以上より、k, ε, ν_t の鉛直平均値は以下のようになる。

$$\bar{k} = D\, l_*\, u_*^2 \left(1 - exp\left(-\frac{\xi}{l_*}\right)\right) \quad (8) \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{u_*^3}{\kappa h}\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)} d\xi \quad (9) \qquad \overline{\nu_t} = \frac{\kappa u_* h}{6} \quad (10)$$

2）各項の補正について

k, ε方程式中では、水平及び鉛直シアーによるProduction項と散逸項がほぼ釣り合うと思われるので、簡略形として表すと、

$$\beta_{PH}\,\beta_{\nu_t}\,C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + C_k \frac{U_{*B}{}^3}{h} - \bar{\varepsilon} = 0 \tag{11}$$

$$\beta_{\varepsilon H}\,C_{1\varepsilon}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}}\right) C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + C_\varepsilon \frac{U_{*B}{}^4}{h^2} - \beta_{2\varepsilon}\,C_{2\varepsilon}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} = 0 \tag{12}$$

以上の係数値を与える式は右の図―1に示している。これらの係数値は、流速係数φの関数となっている。表―1に流速係数がそれぞれφ＝10、15、20の時の各項の定数の値を示す。各項の積分値の評価において、ξ=0やξ=1で特異点となり積分が発散するものがある。これらについては、特異点を避けて積分領域を設定した。

この表の結果より、β_{PH}、$\beta_{\varepsilon H}$は値としては１前後であり、今までのモデル定数を用いたとしても影響は小さいが、C_k及びC_εはかなり大きな値を取り、また、流速係数によっても大きく変化する事が分かった。

$$\overline{\nu_t} = \beta_{\nu_t} C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}$$

$$\beta_{\nu_t} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{exp\,(-2\xi/l_*)}{\xi\,(1-\xi)}\,d\xi}{6\,l_*^2\left(1 - exp\,(-1/l_*)\right)^2}$$

$$\beta_{PH} = 1 + \frac{6}{\kappa\varphi}\int_0^1 \left(-\xi^2+\xi-\frac{1}{6}\right)(ln\,\xi+1)\,d\xi + \frac{6}{\kappa^2\varphi^2}\int_0^1 \left(-\xi^2+\xi\right)(ln\,\xi+1)^2\,d\xi$$

$$\beta_{\varepsilon H} = 1 + \frac{2}{\kappa\varphi}\int_0^1 \left\{\frac{exp\,(-\xi/l_*)}{l_*\left(1-exp\,(-1/l_*)\right)} - 1\right\}(ln\,\xi+1)\,d\xi \quad \frac{1}{\kappa^2\varphi^2}\int_0^1 \left\{\frac{exp\,(-\xi/l_*)}{l_*\left(1-exp\,(-1/l_*)\right)}\right\}(ln\,\xi+1)^2\,d\xi$$

$$C_k = \frac{1}{\kappa}\int_0^1 \frac{1-\xi}{\xi}\,d\xi \qquad C_\varepsilon = C_{1\varepsilon}\frac{1}{\kappa^2 D}\int_0^1 \frac{exp\,(-\xi/l_*)}{\xi^2}\,d\xi$$

$$\beta_{2\varepsilon} = \frac{\left\{\displaystyle\int_0^1 \frac{exp\,(-3\xi/l_*)}{\xi^2(1-\xi)^2}\,d\xi\right\} l_*\left[1-exp\,(-1/l_*)\right]}{\left\{\displaystyle\int_0^1 \frac{exp\,(-2\xi/l_*)}{\xi\,(1-\xi)}\,d\xi\right\}^2}$$

図―1　各項の定数を与える式

表―1　各項の係数値の計算値
（流速係数$\varphi = \frac{1}{\kappa}\,ln\,\frac{h}{k_s} - \frac{1}{\kappa} + A_r$）

φ	$\beta_{\nu t}$	β_{PH}	$\beta_{\varepsilon H}$	$\beta_{2\varepsilon}$	C_k	C_ε
10	0.98	1.00	0.78	1.29	4.0	14.0
15	2.69	1.03	0.87	2.80	9.0	174.1
20	4.46	1.03	0.89	8.94	14.0	1426.0

3）C_k及びC_εの値の再検討

積分範囲から生じる誤差があるので、C_k及びC_εの値をさらに正確に検討するために、等流条件を仮定して検討する。平面における生成項は無視できる場合を考えて、

$$C_k \frac{U_{*B}{}^3}{h} - \bar{\varepsilon} = 0 \quad (13) \qquad C_\varepsilon \frac{U_{*B}{}^4}{h^2} - \beta_{2\varepsilon}\,C_{2\varepsilon}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} = 0 \quad (14)$$

このときのC_k及びC_εの値は、

$C_k = \varphi$　(15)　$C_\varepsilon = (6/k)^{1/2}(\beta_{\nu t}{}^{1/2}\beta_{2\varepsilon})\,\varphi^{3/2} C_{2\varepsilon}\,C_\mu{}^{1/2}$　(16)

これを計算すると、表-2の様になる。C_kはRastogi & Rodiが求めた値のと同じであるが、C_εは異なる。Rastogiらは、C_εの値を与える式として、$C_\varepsilon = 3.6\,\varphi^{3/2} C_{2\varepsilon}\,C_\mu{}^{1/2}$を提案している。$C_\varepsilon$の値については、今後更に検討したい。

表―2　各項の係数値の計算値（再検討）

φ	C_k	C_ε
10	10.0	90.1
15	15.0	595.2
20	20.0	3767.2

3. 結び

k、ε、ν_tの鉛直分布形を仮定することによって、平面２次元のk-ε乱流モデルの定数補正を行った。この補正されたC_k及びC_εを用いることによって、平面２次元におけるみかけの粘性係数の値をより正確に求めることができるようになると思われる。この補正されたk-ε乱流モデルを用いた潮流・拡散シミュレーションの結果は講演時に発表する。最後に、この研究を進めるに当たって、適切な助言を九州大学名誉教授　椿東一郎先生並びに九州大学　中村由行助教授からいただきました。心から感謝の意を表します。

4. 参考文献

1)K.Rastogi, W.Rodi : Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels, Journal of the Hydraulic Division,1978
2) 祢津　家久：開水路乱流の乱れ強度に関する研究、土木学会論文報告集、第261号、pp67～76、1977