

計算格子間隔の影響を考慮した拡散シミュレーション

九州大学大学院 学生員 ○塩見 尚潔

九州大学工学部 正 員 朝位 孝二

九州大学工学部 正 員 小松 利光

1.はじめに

移流拡散方程式を用いて水質シミュレーションを行う際、粗い計算格子間隔を用いると数値拡散による誤差のために現象を忠実に再現できない¹⁾。数値拡散の原因は主に移流項にあるので、種々の高精度計算スキームを適用することで計算精度はある程度改善される。しかしながら、高精度計算スキームは使用する点が多く境界付近の取り扱いに特別な工夫が必要であることが多い。風上差分法は使用する点が少なく取り扱いが容易であるなど大きな利点をもつが数値誤差を引き起こすことが難点である。本研究の目的は、風上差分による離散式に計算格子間隔の影響を取り除くための補正項を導入することによって計算格子間隔が粗い場合でも高い計算精度を維持することである。

2.補正拡散係数

ここでは、移流拡散方程式の拡散項から生じる数値誤差は小さいとして考えない。したがって、2次元純粋移流方程式を風上差分で離散化した際の誤差項を求めると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = & \alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \alpha(1-\alpha^2) \frac{\Delta x^3}{3! \Delta t} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \dots + \beta(1-\beta) \frac{\Delta y^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \beta(1-\beta^2) \frac{\Delta y^3}{3! \Delta t} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \dots \\ & - u v \Delta t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + u^2 v \Delta t^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + u v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \dots \end{aligned} \quad (1)$$

ここで α 、 β はクーラン数であり次のように定義される。

$$\alpha = \frac{u \Delta t}{\Delta x}, \quad \beta = \frac{v \Delta t}{\Delta y}$$

(1)式の右边が誤差項である。純粋移流方程式を風上差分法を用いて計算することと(1)式を厳密に解くことは等価である。ところで、この誤差項はX、Yによるクロス微分を含んでいる。しかしながら、クロス微分を無視した形で誤差項を評価しても誤差の生じ方にそれ程の違いがないことが数値実験の結果から確かめられた。また、無限に続く誤差項のうちの筆頭項から生じる数値拡散が支配的で高次の誤差項はほぼ省略できることも同様に確かめられたので、ここでは(1)式の右边は以下のように近似できるものとする。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \beta(1-\beta) \frac{\Delta y^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (2)$$

(2)式の右边が誤差を発生させる原因を表している。よって、この項を差し引くことによって誤差が大幅に軽減されることが期待できる。補正拡散係数は次のようになる。

$$K_x = -\alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t}, \quad K_y = -\beta(1-\beta) \frac{\Delta y^2}{2! \Delta t}$$

3.モデル湾における拡散シミュレーション

補正項を加えた移流拡散方程式は以下のようにになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{h+\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h+\zeta) D_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (h+\zeta) D_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + q \right] + K_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (3)$$

ここで、 h は平均水深、 q は負荷流入量である。(3)式の右边第2項、3項が補正項である。

モデル湾として図-1に示すようなL型の湾を用い、前報²⁾に示す潮流計算より求めた流速 U 、 V 、潮位 ζ 、みかけの水平粘性係数 ν_t を使って拡散計算を行った。渦動拡散係数 D_x, D_y には、 ν_t の平均値 $194.3 \text{ m}^2/\text{sec}$ を採用した。

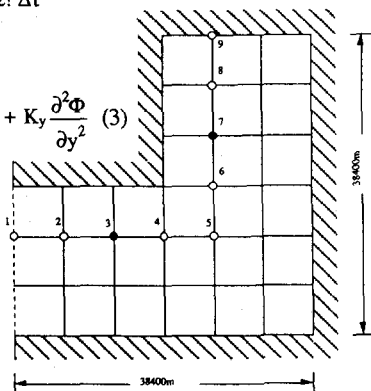


図-1 計算モデル

また、計算結果の精度の比較を行なう差分方法として

(A) 移流項に6-point scheme、拡散項に2次精度中央差分

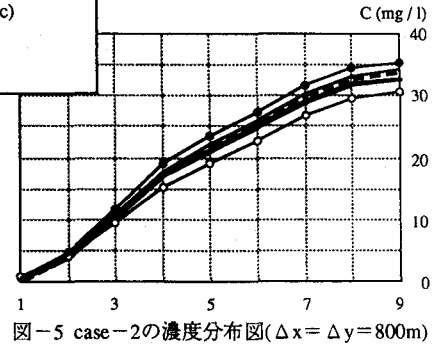
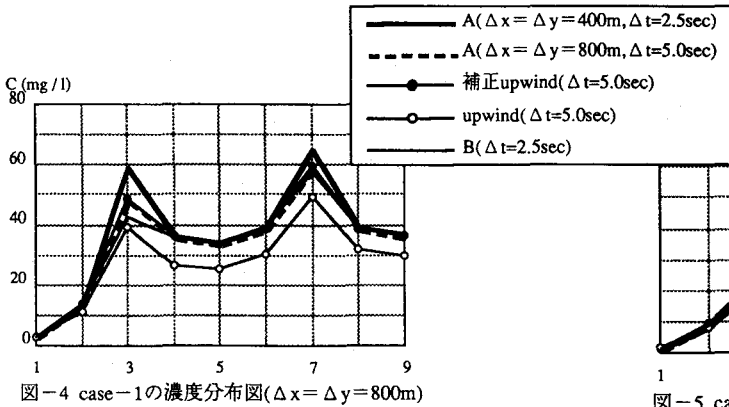
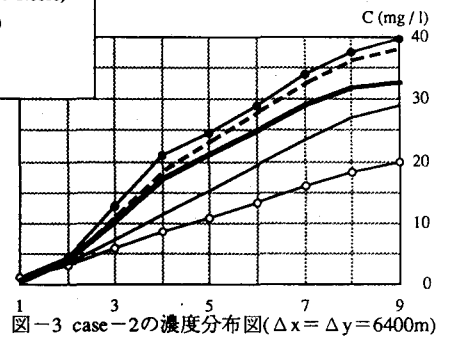
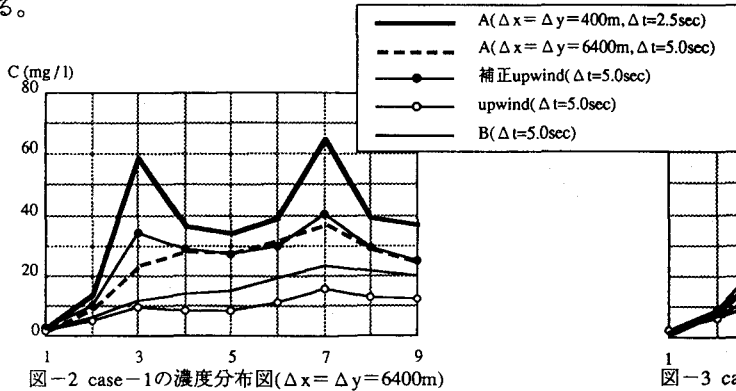
(B) 移流項に2次精度UPWIND、拡散項に2次精度中央差分、時間積分に2次精度Adams-Bashforth法

を採用した。それぞれ計算格子間隔 $\Delta X = \Delta Y = 6400, 800\text{ m}$ の2通りについて非定常拡散計算を次の2通りの場合について60周期間行なった。

(case-1) 拡散物質の初期濃度は 0.0 mg/l で図-1の●点3に負荷量 10.24 t/sec 、●点7に 5.12 t/sec の連続負荷流入源を設けた場合

(case-2) モデル湾全体に初期濃度 50.0 mg/l を与え負荷流入源はない場合

$\Delta X = \Delta Y = 6400\text{ m}$ と 800 m における図-1の○点に沿った60周期後の1次元濃度分布を図-2, 3, 4, 5に示す。また(A)の方法で、 $\Delta X = \Delta Y = 400\text{ m}$ で計算した結果を真値に近いものと考え精度の基準として図中に示している。



4. おわりに

補正項を導入したUPWINDは補正しないUPWINDや2次精度UPWINDに比べてかなり精度良く計算できるようになっている。その精度も6-point schemeと同程度であることが分かった。今後は、誤差項の高次の項まで含めた形で補正項を評価していく予定である。

5. 参考文献

- 1) 塩見・朝位・小松・松永：計算格子間隔の拡散係数に及ぼす影響について、平成3年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集，pp.258-259, 1992.