多段階重み付差分法による潮流解析

東　和　大学　正員　空閑幸雄
九州産業大学　正員　加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
九州産業大学　　　　寺本哲治

1．まえがき　潮流解析を行うにあたり、前報[1)]で我々の提唱した重み付差分法が2次元バーガーズ方程式の厳密解と比較的一致したことを述べた。しかし実際の湾内を差分法で潮流解析する場合、計算時間の節約や解をなめらかにするため、いろいろの技巧が使われる。運動方程式（1）と連続の式（2）を交互に解析するのもその一つである。そこで本報では、2段階重み付差分法を考えその定式化および重みの定め方について述べる。また、重み付差分法による数値解の精度検証は、前報[1)]同様2次元バーガーズ方程式の厳密解との比較により示す。

2．基礎方程式　基礎方程式として三次元のレイノルズ方程式を海底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した二次元の運動方程式［式（1）にx方向のみ示す］および連続の式（2）を基礎式とする。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial y}=-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}$$
$$-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \quad (1) \qquad , \frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \quad (2)$$

ここに、M＝U（h＋ζ），N＝V（h＋ζ）はおのおのx，y方向の線流量、U，Vはそれぞれx，y方向の平均流速、ζは水面の平均水面からの高さ、W_x, W_y はx，y方向の風速成分、gは重力の加速度、fはコリオリの係数、εは水平方向の渦動粘性係数、ρ_a, ρ_w は空気および水の密度、δ＝1～1．5の補正係数、γ_b, γ_s は水底、水面における摩擦係数である。また、流速ベクトル $V=\sqrt{U^2+V^2}$ とする。

$$\frac{M}{h+\zeta}=m \;, \quad \frac{N}{h+\zeta}=n \qquad (3) \;,$$

$$-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN=F_L \qquad (4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=F_L \qquad (5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=0 \qquad (6)$$

$$M^r(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{(2\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \qquad (7)$$

$$M(i,j,k)=W_1\cdot M(i-1,j+1,k)+W_2\cdot M(i+1,j-1,k)$$
$$+W_3\cdot M(i-1,j,k-1)+W_4\cdot M(i,j-1,k-1)$$
$$+W_5\cdot M(i-1,j-1,k-1)+W_6\cdot M(i,j,k-2) \qquad (8)$$

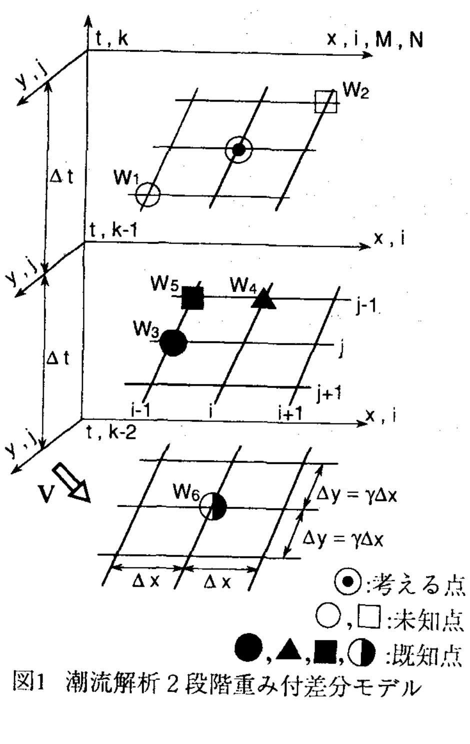

図1　潮流解析２段階重み付差分モデル

3．重み付差分法の定め方と精度　いま、二次元運動方程式（1）を解析するための重み付差分法を求めるため、基礎式（1）において式（3）、（4）のように表わし、式（1）を式（5）と書き直す。ここで、F_Lを非同次項とみなしF_Lをゼロとおいた式（6）は2次元バーガーズ方程式（同次方程式）である。そこで、F_L＝0とおいた同次形の式を満たす重み付差分法を以下の様にして求める。即ち、同次形の式を満たすx，y，tの多項式は式（7）で表わされる。いま、

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
(-1+\gamma) & (1-\gamma) & (-1+F_*) & (-\gamma+F_*) & (-1-\gamma+F_*) & (2F_*) \\
(-1+\gamma)^2 & (1-\gamma)^2 & (-1+F_*)^2 - 2!\mu_* & (-\gamma+F_*)^2 - 2!\mu_* & (-1-\gamma+F_*)^2 - 2!\mu_* & (2F_*)^2 - 2!(2\mu_*) \\
(-1+\gamma)^3 & (1-\gamma)^3 & (-1+F_*)^3 - 3!(-1+F_*)\mu_* & (-\gamma+F_*)^3 - 3!(-\gamma+F_*)\mu_* & (-1-\gamma+F_*)^3 - 3!(-1-\gamma+F_*)\mu_* & (2F_*)^3 - 3!(2F_* \cdot 2\mu_*) \\
(-1+\gamma)^4 & (1-\gamma)^4 & (-1+F_*)^4 - 4!(-1+F_*)^2\cdot\mu_*/2! + 4!\mu_*^2/2! & (-\gamma+F_*)^4 - 4!(-\gamma+F_*)^2\cdot\mu_*/2! + 4!\mu_*^2/2! & (-1-\gamma+F_*)^4 - 4!(-1-\gamma+F_*)^2\cdot\mu_*/2! + 4!\mu_*^2/2! & (2F_*)^4 - 4!(2F_*)^2\cdot 2\mu_*/2! + 4!(2\mu_*)^2/2! \\
(-1+\gamma)^5 & (1-\gamma)^5 & (-1+F_*)^5 - 5!(-1+F_*)^3\cdot\mu_*/3! + 5!(-1+F_*)\mu_*^2/2! & (-\gamma+F_*)^5 - 5!(-\gamma+F_*)^3\cdot\mu_*/3! + 5!(-\gamma+F_*)\mu_*^2/2! & (-1-\gamma+F_*)^5 - 5!(-1-\gamma+F_*)^3\cdot\mu_*/3! + 5!(-1-\gamma+F_*)\mu_*^2/2! & (2F_*)^5 - 5!(2F_*)^3\cdot 2\mu_*/3! + 5!(2F_*)(2\mu_*)^2/2!
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\quad (9)
$$

$$F_* = F_x + \gamma F_y, (F_x = m \cdot \Delta t / \Delta x, F_y = n \cdot \Delta t / \Delta y), \mu_* = \mu_x + \gamma^2 \mu_y, (\mu_x = \varepsilon \cdot \Delta t / \Delta x^2, \mu_y = \varepsilon \cdot \Delta t / \Delta y^2)$$

同次形の式において原点を任意の点に移し、差分格子間隔を $\Delta x = h$、$\Delta y = \gamma h$、$\Delta t = k = R \cdot h^2$ とし、原点のごく近くを考えて、x，y，tを離散化して $x = p_1 h$、$y = \gamma p_2 h$、$t = q R h^2$ と表わす。ここに、p_1, p_2, q は0, ±1, ±2 のような大きくない整数。ここで、図１の近接点６個を用い、この６個６種類の重みを定めるために式（７）において、r＝０，１，２，３，４，５とおいて得られるMの値を重み付差分式（８）に代入すれば連立方程式（９）が得られ、これを解けば重み w_1，w_2，w_3，w_4，w_5，w_6 の値が定まる。次に、本手法の精度検証では、クーラン数 F_* が０．１から１．０までの２次元バーガーズ方程式（ここでは、渦動粘性係数がなく下流へ伝わる理想化された衝撃波を考えている。）の非定常計算を行い、各時間に対する数値解と厳密解との比較検討を行った。図２にその結果の一部を示す。

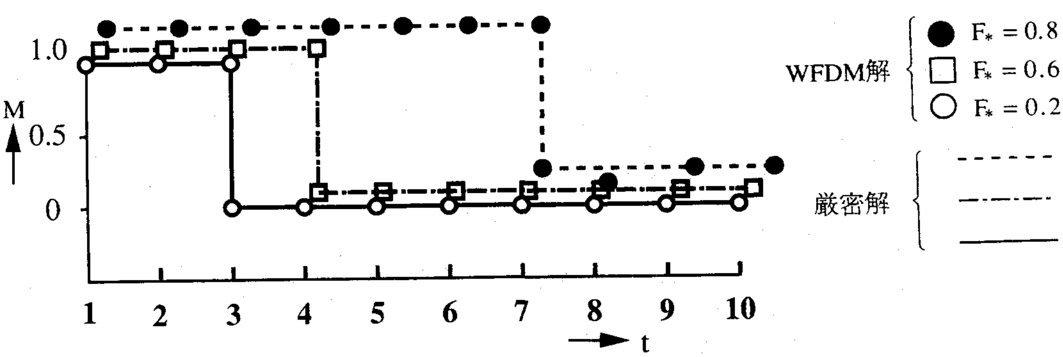

図2　2段階重み付差分解と厳密解

<u>４．まとめ</u>　今回図１に示す２段階差分モデルで、クーラン数 F_* を０．１から１．０までの精度検証を行った結果、クーラン数が大きくなると若干精度が悪くなる。これは、クーラン数 F_* が大きくなると、上流型差分モデルを使用するとか、F_* の大きさにより差分モデルを変えて行くことで精度よく解析できるものと考える。さらにいく種類かの差分モデルについて精度検証を行うとともに、実際の湾内の潮流解析への適用を考えている。ただ実際の潮流解析では本報で示す陰的解法では多大の計算時間と配列を必要とするので、これからは特に陽的解法の差分モデルを考え精度検証を行っていきたい。

参考文献

１）加納・赤坂・空閑：重み付差分法による潮流解析　　第４７回年次学術講演会Ⅱ部