

偏平ケーブルに現われる1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動の解析

長崎大学工学部 学生員 ○町田健一郎 正 員 高橋和雄
学生員 松野進 学生員 鎌田智之

1. まえがき 非線形振動系に発生するカオスが注目され、多くの研究がなされているが、構造部材の一つであるケーブルにおいても、その存在が報告されている¹⁾。ところで、ケーブルの運動方程式は、2次と3次の非線形項を持つ。したがって、面内周期的等分布荷重が作用する場合、分岐型の応答の一つである分数調波共振においては、1/2分数調波共振が卓越し、その近傍にカオスの振動が発生する¹⁾。しかし、このようなカオスの振動に対しては、解析的手法では対応できないため、数値シミュレーションを行う必要がある。著者ら²⁾は、前回の報告で、まずサグ比1/8以下の偏平ケーブルについて、サグ比をパラメーターに、対称振動における1/2分数調波共振の振動特性を明らかにした。次いで、数値シミュレーションとの比較を行い、両者が一致することを確認した。そこで、本研究では前回と同様な1自由度振動系モデルに対し、サグ比と荷重強度をパラメーターに数値シミュレーション

2. 運動方程式 図-1に示すような偏平ケーブルが周期的等分布荷重を受ける場合の運動方程式は、次式のように与えられる²⁾。

$$L(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{\ell^2} h - (H_e + h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p \cdot \cos \Omega t \quad \text{図-1 ケーブルの一般図} \quad (1)$$

$$h = \frac{EA}{L_e} \left\{ \frac{8f}{\ell^2} \int_0^{\ell} w dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

ここに、 w ：面内鉛直たわみ、 t ：時間、 m ：ケーブルの単位長さあたりの質量、 f ：ケーブルサグ、 ℓ ：ケーブルスパン長、 h ：活荷重水平張力、 E ：ヤング率、 A ：断面積、 $L_e = \ell(1 + 8f^2/\ell^2)$ ：ケーブル長、 H_e ：初期水平張力、 p ：外力の振幅、 Ω ：外力の円振動数

3. 解法 まず、式(1)の解を1自由度系モデルで、次の変数分離形に仮定する。

$$w = \ell T(t)W(x) \quad (2) \quad \text{ここに、} T(t) : \text{未知の時間関数、} W(x) : \text{境界条件を満足する座標関数}$$

上式の座標関数 W として、基準化した自由振動の面内対称モードを用いる。次に、式(1)にGalerkin法を適用し、さらに、粘性減衰力を考慮すると、次式が得られる。

$$\ddot{T} + 2\bar{\omega}_1 \dot{T} + \omega_1^2 T + C_2 T^2 + C_3 T^3 = \bar{p} \cdot \cos \bar{\omega} \tau \quad (3)$$

ここに、 $\omega_1 = n_1/\pi n_0$ ：1次の無次元固有円振動数、 $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m \ell^2}$ ：弦の1次の固有円振動数、 n_1 ：ケーブルの1次の固有円振動数、 $\xi = x/\ell$ 、 $C_2 = 12\gamma I_b I_c I_d$ 、 $C_3 = I_b^2 I_d / 2$ 、 $\bar{p} = p \cdot \ell I_c / H_e I_a \pi^2$ 、 $I_a = \int_0^1 W^2 d\xi$ 、 $I_b = \int_0^1 W'^2 d\xi$ 、 $I_c = \int_0^1 W d\xi$ 、 $I_d = k^2 / (1 + 8\gamma^2) I_a \pi^2$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$ 、 $\tau = n_0 t$ 、 $\gamma = f/\ell$ ：サグ比、 $k = \sqrt{EA/H_e}$ ：縦波-横波伝播速度比

1/2分数調波共振を求めるため、式(3)の解を次式のように仮定する。

$$T = \frac{A_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

$$= A_0/2 + A_{1/2} \cos(\bar{\omega} \tau / 2 - \phi_{1/2}) + A_1 \cos(\bar{\omega} \tau - \phi_1)$$

ここに、 A_0 、 $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$ ：付随応答の振幅、 c_1 、 s_1 ：付随応答成分、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$ ：分岐応答の振幅、 $c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$ ：分岐応答成分、 $\phi_1 = \tan^{-1}(s_1/c_1)$ 、 $\phi_{1/2} = \tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$ ：位相差

式(4)を式(3)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を求める連立非線形代数方程式を得る。これに、Newton-Raphson法を用い、適当な初期値のもとに解けば解が得られる。

また、式(3)を2元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill法による直接数値積分を行えば、時間応答を得る。

4. 数値結果 図-2には、サグ比 $\gamma=0.02$ 、荷重強度 $\bar{p}_0=0.04$ について、縦軸に振幅成分、横軸に無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ をとり、1/2分数調波共振近傍の主調波共振 A_1 と1/2分数調波共振 $A_{1/2}$ を示した。図中の○印は、数値シミュレーションによる振幅である。これらのシミュレーションにあたっては、初期変位、速度をいずれも0とし、時間刻みは $\Delta\tau=1/200$ 無次元時間で $n\Delta\tau=4000$ 以降の応答を求めた。また、振動の周期を特定するため、位相平面図、パワースペクトルを参考にした。その結果、図中のポイント①、⑦は外力と同周期 T の主調波共振、④、⑥は2倍周期 $2T$ の1/2分数調波共振であり、この2種類の定常応答は、解析解と一致している。一方、ポイント②、③、⑤では、周期 T および周期 $2T$ と一致しない応答が生じている。加振振動数 $\bar{\omega}=2.68$ ($f=0.43$, f :振動数)のポイント②について、その時間応答波形、位相平面図、パワースペクトルを図-3、4、5に示した。この場合カオス的な振動が生じている。同様に、ポイント③では周期 $6T$ 、⑤では周期 $8T$ の応答が確認できた。

5. まとめ カオスの発生領域と発生に及ぼすケープルのサグの影響については、講演時に発表する。

参考文献 1) Rega, G., Benedettini, F.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 132, No. 3, 1989.

2) 高橋・町田・入江: 平成3年度土木学会西部支部講演概要集, 1992.

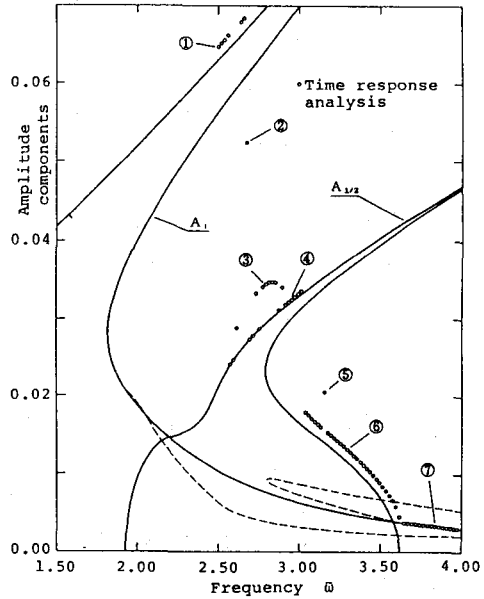


図-2 1/2分数調波共振($k=30$, $\gamma=0.02$, $\bar{p}_0=0.04$)

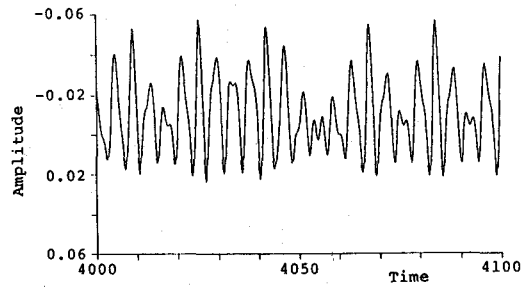


図-3 時間応答波形($k=30$, $\gamma=0.02$, $\bar{\omega}=2.68$)

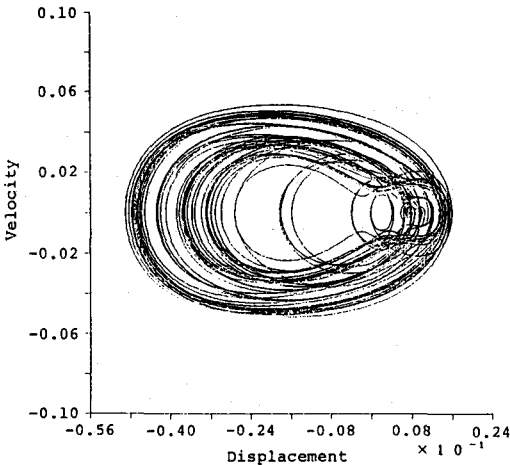


図-4 位相平面図($k=30$, $\gamma=0.02$, $\bar{\omega}=2.68$)

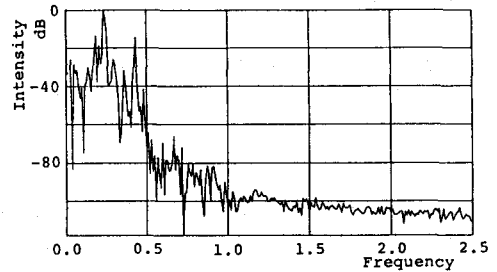


図-5 パワースペクトル($k=30$, $\gamma=0.02$, $\bar{\omega}=2.68$)