

離散化グリーン関数による曲線梁の自由振動解析

長崎大学 工学部 学生員 ○川添和美

大日本コンサルト(株) 正 員 川神雅秀

長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅

長崎大学 工学部 正 員 森田千尋

1. まえがき

骨組構造物の固有値解析においては、有限要素法、伝達マトリックス法及び差分法などのさまざまな解法が用いられている。本研究では、グリーン関数を導入し標準形固有値問題としての解析法を提示する。即ち、グリーン関数の誘導は、基礎微分方程式を積分方程式に変換し、数値積分を適用することで、離散的一般解として求める。次にこのグリーン関数を用いて、自由振動に関する運動方程式を境界積分方程式に変換し、これに数値積分を適用して固有値解析を行うものである。ここでは、種々の曲線及び変断面形状を有する曲線梁について、自由振動解析を行った結果を報告する。

2. 自由振動解析の定式化

曲げねじりを無視できる曲線梁の横自由振動及び基本解に対する基礎微分方程式は各々次式となる。

<横自由振動の運動方程式>

$$\frac{dQ}{ds} = -\rho A \omega^2 y + \sum_{j=1}^n V_j \delta(s-b_j) \quad (1-1)$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{M}{R} + \sum_{j=1}^n H_j \delta(s-b_j) \quad (1-2)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q - \frac{T}{R} \quad (1-3)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\varphi}{R} - \frac{M}{EI} \quad (1-4)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{T}{GJ} - \frac{\theta}{R} \quad (1-5)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{Q}{\kappa GA} + \theta \quad (1-6)$$

<基本解に対する基礎方程式>

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} = -P_0 \delta(s-a) + \sum_{j=1}^n \bar{V}_j \delta(s-b_j) \quad (2-1)$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{\bar{M}}{R} + \sum_{j=1}^n \bar{H}_j \delta(s-b_j) \quad (2-2)$$

$$\frac{d\bar{M}}{ds} = \bar{Q} - \frac{\bar{T}}{R} \quad (2-3)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{ds} = \frac{\bar{\varphi}}{R} - \frac{\bar{M}}{EI} \quad (2-4)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{ds} = \frac{\bar{T}}{GJ} - \frac{\bar{\theta}}{R} \quad (2-5)$$

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{\bar{Q}}{\kappa GA} + \bar{\theta} \quad (2-6)$$

ここに、A:断面積、I:断面2次モーメント、J:ねじり定数、E:弾性係数、G:せん断弾性係数、

κ :せん断修正係数、 ρ :単位体積質量、 ω :固有円振動数、 P_0 :単位集中荷重、

$\delta(s-a)$, $\delta(s-b_j)$:Diracのデルタ関数、 V_j , H_j , $\bar{V}_j$, $\bar{H}_j$:連続曲線梁中間支点の支点反力

式(1-1)の両辺に $\bar{y}$ を乗じこれを梁の全領域

$[0, L]$ で積分した式(3)で定式化する。この式を部分積分し、式(1-2)~(2-6)の関係式を使って整理する。さらに両端の境界条件、中間支点における拘束条件を考慮し、以下の無次元量を導入すると式(4)となる。

$\lambda^4 = \rho A \omega^2 L^4 / EI_0$:固有値、 $\bar{A} = A/A_0$,

$\eta = s/L$:梁の着目点、 $\xi = a/L$:荷重作用点、

$G(\eta, \xi) = \bar{y}$:たわみのグリーン関数

式(4)の積分方程式に m 等間隔の数値積分を適用すると、曲線梁の固有値は式(5)より求まる。

尚、 G_{ij} は集中荷重 P_0 が j 点に作用した時の i 点でのたわみを、 β_{ij} は台形則及びSimpsonの重み係数を示す。

$$\int_0^L \frac{dQ}{ds} \bar{y} ds = - \int_0^L \rho A \omega^2 y \bar{y} ds + \sum_{j=1}^n V_j \int_0^L \bar{y} \delta(s-b_j) \quad (3)$$

$$y(\xi) = \lambda^4 \int_0^1 \bar{A}(\eta) y(\eta) G(\eta, \xi) d\eta \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} (\beta_{m0} \bar{A} G_{00} - \frac{1}{\lambda^4}) & \beta_{m1} \bar{A} G_{10} & \cdots & \beta_{mm} \bar{A} G_{m0} \\ \beta_{m0} \bar{A} G_{01} & (\beta_{m1} \bar{A} G_{11} - \frac{1}{\lambda^4}) & \cdots & \beta_{mm} \bar{A} G_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m0} \bar{A} G_{0m} & \beta_{m1} \bar{A} G_{1m} & \cdots & (\beta_{mm} \bar{A} G_{mm} - \frac{1}{\lambda^4}) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

3. 離散的一般解によるグリーン関数の誘導

式(2-1)～(2-6)において、以下に示す無次元量を導入し、領域 $[0, \eta]$ での積分方程式に変換する。

$X_1 = -L^2 \bar{Q}/EI_0$, $X_2 = -L \bar{T}/EI_0$, $X_3 = -L \bar{M}/EI_0$, $X_4 = \bar{\theta}$, $X_5 = \bar{\varphi}$, $X_6 = \bar{y}/L$, $V^* = -L^2 \bar{V}/EI_0$, $H^* = -L \bar{H}/EI_0$, $\eta = s/L$
次に全域 $[0, 1]$ を m 等分割し、この積分方程式に等間隔の数値積分を適用し、境界条件を考慮の上、左側等分点より順に連立方程式の解を求めると、曲線梁の任意等分点における離散的一般解は次式となる。

$$X_{pi} = \sum_{d=1}^6 a_{pid} X_{d0} + q_{pi} + \sum_{j=1} b_{pij} V^*_{*j} + \sum_{j=1} c_{pij} H^*_{*j} \quad (6)$$

以上からたわみの離散化グリーン関数 X_{6i} を求め、この結果を式(5)の $G(\eta, \xi)$ に適用する。

尚、この離散的一般解 X_{pi} を求める解法の詳細については、文献1)を参照されたい。

4. 解析結果

本解析法による曲線梁の自由振動解析結果の精度を明らかにするため、Fig. 1(a)に示す両端単純支持円弧形曲線梁($\Phi=60^\circ$)を対象に、離散化グリーン関数の分割数を $n=30, 40, 60$ 、固有値算出用分割数を $m=20, 30$ とした場合について、5次までの固有値入を、他の解析結果と比較した(Table1)。本例の解析結果によると、 $n=30$ とした場合でも、文献2)の解との誤差は1%程度である。

次に、Fig. 1(a)に示した円弧形曲線梁において、ねじり剛性と曲げ剛性との比を $GJ/EI=0.5, 0.75, 1.0$ とした場合の固有値 λ と中心角 Φ との関係を、Fig. 2(1次の固有値のみ)に示す。同図より明らかなように、中心角の増加に従い固有値は低下し、ねじり剛性と曲げ剛性との比が大きくなると固有値も大きくなっていく。

また、Fig. 1(b)に示す1/4円反方向の2径間連続曲線梁の固有値について、本解析結果と有限要素法による結果との比較をTable2に示す。本解析においても、有限要素法とほぼ一致した結果が得られた。

Table1 Frequency Coefficient λ of Curve Beam

Order	K _m (2) in references			Discrete Analysis		
		m	n	30	40	60
1	2.78020	20		—	2.78563	2.78562
		30		2.78607	—	2.78554
		FEM		2.7850(n=30)		
		Mode of vibration				
2	6.08835	20	—	6.08980	6.08841	
		30	6.09253	—	6.08819	
		FEM	6.0124(n=30)			
		Mode of vibration				
3	9.2966	20	—	9.28280	9.27947	
		30	9.29592	—	9.27943	
		FEM	9.2891(n=30)			
		Mode of vibration				
4	12.46855	20	—	12.44910	12.43757	
		30	12.4667	—	12.43432	
		FEM	12.4326(n=30)			
		Mode of vibration				
5	15.62773	20	—	15.56799	15.54135	
		30	15.62189	—	15.55224	
		FEM	15.6218(n=30)			
		Mode of vibration				

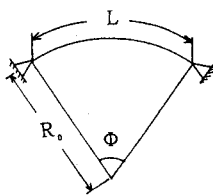


Fig. 1(a) Curved Beam

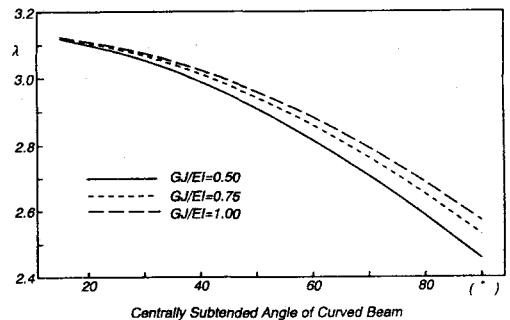


Fig. 2 Frequency Curve and Centrally Subtended Angle of Curved Beam

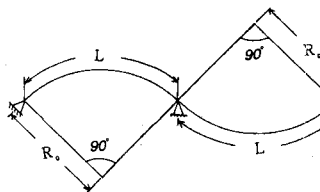


Fig. 1(b) 2-span Curved Beam

Table2 Frequency Coefficient λ of 2-span Curve Beam

Order	Discrete Analysis (n=30)	FEM (n=32)
1	2.39277	2.3959
2	3.52924	3.5188
3	5.86327	5.8439
4	6.75991	6.7402
5	9.15745	9.1256

[参考文献]

- 1) 崎山毅, 松田浩: 非対象形アーチの面内自由振動特性, 土木学会論文集, 第368号, pp425-428, 1986
- 2) 振動便覧, 土木学会, pp88-89, 1985