

Pasternak基礎上の片持ち板の振動および座屈

長崎大学工学部 学生員 ○古谷寿章

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 江島裕章

1. まえがき Kar¹⁾はPasternak基礎上の変断面片持ちばりに熱勾配がある場合の動的安定性を解析している。この問題をより現実的にかつ厳密に解析するためには、片持ちばりを片持ち板に拡張することが必要である。この第1段階として、著者らは、単純支持と固定の境界条件の組み合わせからなるPasternak基礎上の一様断面の長方形板の動的安定性を解析し、その力学的特性を明らかにしてきた²⁾。続いて、本研究では、これらの成果を片持ち板に適用するために、熱勾配をもつPasternak基礎上の変断面片持ち板の振動および座屈解析を行うものである。本研究においては、片持ち板の試行関数の仮定が容易なエネルギー法³⁾による解析を行い、振動および座屈に及ぼすPasternak基礎の剛性、変断面および温度パラメータの影響を明らかにする。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すような、バネとせん断層からなるPasternak基礎上のx方向の熱勾配をもつ変断面片持ち板が、x方向の一様分布の静的面内力を受ける場合の長方形板、弾性バネおよびせん断層のひずみエネルギー Vおよび長方形板の運動エネルギー Tは、次のように与えられる³⁾。

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D(x) \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)^2 \right] \} dx dy$$

$$+ \frac{1}{2} K_e \int_0^b \int_0^a w^2 dx dy + \frac{K_s}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \frac{N_x}{2} \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (1)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} \int_0^b \int_0^a h w^2 dx dy \quad (2)$$

ここに、 $D(x) = E(x)h(x)^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、
 $E(x)$ ：ヤング率、 $h(x)$ ：板厚、 ν ：ポアソン比、
 ρ ：板の密度、 ω ：固有円振動数、 w ：たわみ、
 K_e ：バネ定数、 K_s ：せん断層定数、
 x, y ：平板中央面の座標系
 上式において熱勾配の項はヤング率Eに含まれている。

本研究において、長方形板の板厚およびヤング率はいずれもx方向に線形的に変化するものとし、これらを $x = a$ の断面の諸値を用いて表すと次のようになる²⁾。

$$h(\xi) = h_1 \{ 1 + \beta^* (1 - \xi) \} = h_1 G(\xi), \quad E(\xi) = E_1 \{ 1 + \delta (1 - \xi) \} = E_1 T(\xi)$$

$$D(\xi) = D_1 \{ 1 + \delta (1 - \xi) \} \{ 1 + \beta^* (1 - \xi) \}^3 = D_1 T(\xi) G(\xi)^3 = D_1 S(\xi)$$

ここに、 β^* ：変断面パラメータ、 δ ：温度パラメータ、 $\beta = a/b$ ：縦横比、

$$D_1 = E_1 h_1^3 / 12(1 - \nu^2), \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/b$$

また、一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (3)$$

ここに、 h_m ：片持ちばりの固有振動形、 $\bar{h}_n$ ：両端自由ばりの固有振動形、 A_{mn} ：未定定数、 ω ：固有円振動数
 式(1)、(2)を無次元化し、Rayleigh-Ritz法を適用すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (E_{mrns} - \lambda \nu^4 F_{mrns} - \bar{N}_x G_{mrns}) = 0 \quad (4)$$

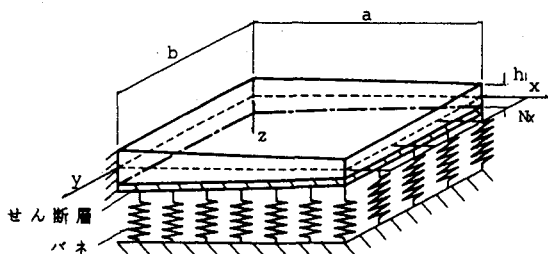


図-1 一般図

ここに

$$E_{mrns} = -\frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^3) + I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^3 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^4$$

$$+ \kappa_e I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + \kappa_s \left(\frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^4 \right)$$

$$F_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} \quad G_{mrns} = I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} \quad \bar{I}_{ns}^2, I_{mr}^2, \dots: \text{固有関数の定積分} \quad (m, n, r, s=1, 2, \dots, N)$$

$$\lambda_v = \sqrt{\rho h_1 \omega^2 b^4 / D_1}, \quad \kappa_e = K_e b^4 / D_1, \quad \kappa_s = K_s b^2 / D_1, \quad \bar{N}_x = N_x b^2 / D_1$$

式(4)は次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda_v^* [F] - \bar{N}_x [G]) \{x\} = \{0\} \quad (5)$$

$$[E] = E(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = E_{mrns}$$

$$[F] = F(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = F_{mrns}$$

$$[G] = G(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = G_{mrns}$$

$$\{x\} = (A_{1,1} \ A_{1,2} \ A_{1,3} \ \dots \ A_{1,N} \ A_{2,1} \ \dots \ A_{2,N} \ \dots \ A_{N,N})^T$$

すなわち $\bar{N}_x = \text{const}$ とおけば自由振動の固有値 λ_v が得られ、慣性項を無視すれば座屈固有値 $\lambda_b = \bar{N}_x$ が得られる。数値計算においては、式(5)を行列の固有値問題に変換する。

3. 数値結果

1) 固有振動解析 一様断面の片持ち長方形板の固有値 λ_v を求めたところ、文献3)の結果と一致することを確認した。

図-2, 3に片持ち長方形板の固有振動曲線を示す。縦軸 λ_v^2 は振動の固有値(固有振動数)、横軸 β^* 、 δ は変断面パラメーターおよび温度パラメーターである。

β^* が増加するにしたがって固有値は増加し、その効果は高次振動になるほど大きくなる。また、温度パラメーター δ が増加するにしたがって固有値は減少し、その効果は高次振動になるほど大きくなる傾向がある。

2) 座屈解析 図-4は変断面片持ち長方形板 ($\kappa_e = 2.0$, $\kappa_s = 2.0$) の座屈曲線を示す。 β^* が増加すると座屈固有値 λ_b は増加し、温度パラメーター δ の存在は座屈固有値を下降させる効果をもつ。

4. まとめ

解の精度およびGalerkin法との比較については、講演時に発表する。

参考文献

- 1) Kar, R.C. and Sujata, T.: Computer & Structures, Vol. 29, No. 4, pp. 591-599, 1988.
- 2) 高橋, 其田, 夏秋: 構造工学論文集, Vol. 38A, 1992.
- 3) Leissa, A.W.: Vibration of Plates. NASA SP-160, p. 76, 1969.

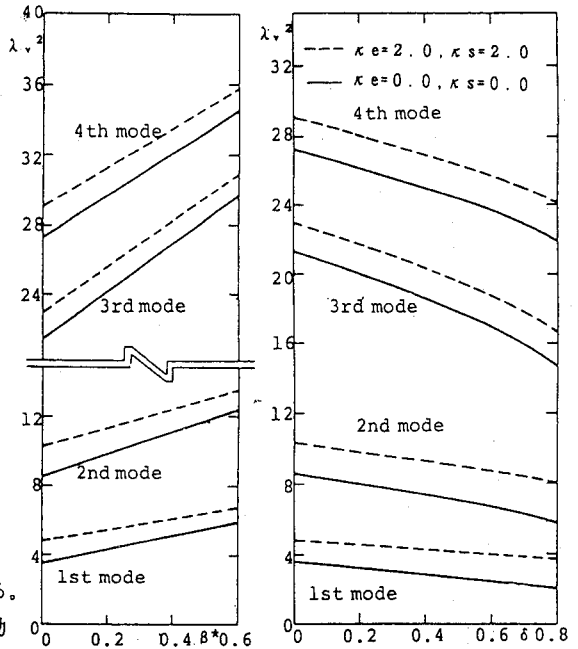


図-2 固有振動特性
(変断面断面の影響)

図-3 固有振動特性
(温度勾配の影響)

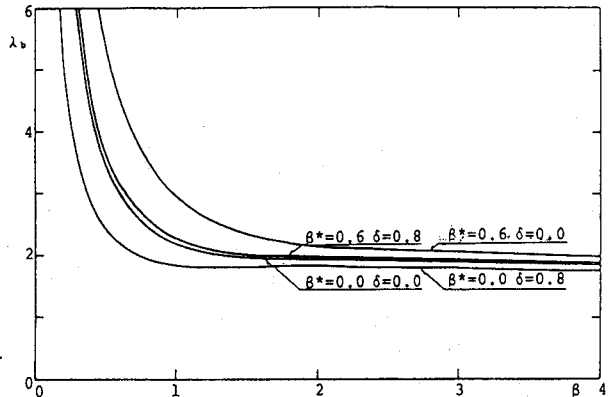


図-4 座屈曲線