

対称積層板の振動及び座屈解析 -カップリングの影響-

長崎大学工学部 学生員 ○佐藤栄司

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 江島裕章

1. まえがき 積層板は、各層の材質、板厚および繊維方向を変化させることによって、利用目的に合った材料を得ることができるため、多くの分野で活用されている。積層板の平衡方程式は異方板の特性と曲げモーメントとねじりモーメントの連成が含まれるために、動的安定まで取った研究はこれまでにないようである。著者らは、積層板の動的安定を解析するために、カップリング効果を無視した解析¹⁾を行い、引き続きカップリングの影響を考慮した解析に拡張する計画である。本研究では、その第1段階としてカップリングを考慮した場合の振動解析と座屈の結果を明らかにするものである。

2. 運動方程式および解法 曲げとねじりのカップリングを考慮した図-1に示すような積層板に一様分布の面内力 N_x が作用した場合の運動方程式は次式で与えられる²⁾。

$$L(w) = D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 : 板剛度、 w : たわみ、 h : 板厚、

ρ : 板の密度、 x, y : 座標系、 t : 時間、 θ : 繊維方向

式(1)の無次元化を行うと

$$L(w) = \frac{D_1^*}{\beta^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{4D_2^*}{\beta^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_3^* \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{4D_4^*}{\beta^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{4D_5^*}{\beta} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \rho h \frac{b^4}{D_1^*} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_x \frac{b^2}{D_1^*} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\beta = a/b$ (縦横比)、 $D_1^* = D_1/D_1^0, D_2^* = D_2/D_1^0, D_3^* = D_3/D_1^0, D_4^* = D_4/D_1^0, D_5^* = D_5/D_1^0$
 $D_1^0 : \theta = 0^\circ$ の板剛度、 $\xi = x/a, \eta = y/b$

長方形板の境界条件は、次の4種類を考える。

CASE I : 全周辺単純支持、CASE II : 荷重辺単純支持、他対辺固定

CASE III : 荷重辺固定、他対辺単純支持、CASE IV : 全周辺固定

式(2)の解を次式のように仮定する。

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(\xi, \eta) \exp(i\omega_{mn} t) \quad (3)$$

ここに、 a_{mn} : 未定定数、 ω_{mn} : 固有振動数、 $W_{mn}(\xi, \eta)$ は境界条件を満たす関数で次式のように表す。

$$W_{mn}(\xi, \eta) = h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \quad (4)$$

式(2)に式(3)、式(4)を代入し、Galerkin法を適用すると、

$$\int_0^1 \int_0^1 L(w) h_r(\xi) \bar{h}_s(\eta) d\xi d\eta = 0 \quad (5)$$

ここに、 $r=1, 2, 3, \dots, L, s=1, 2, 3, \dots, L$

式(5)の積分を実行してまとめると、次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda_v [F] - \lambda_b [G])(A) = \{0\} \quad (6)$$

ここに、

$$[E] : E(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = E_{mrns} \quad [F] : F(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = F_{mrns}$$

$$[G] : G(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = G_{mrns} \quad (A) : \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1L}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{LL}\}^T$$

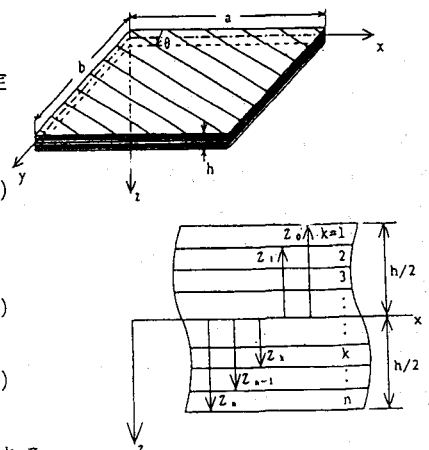


図-1 一般図

$$E_{mrns} = \frac{D_1^*}{\beta^4} I_{mr}^* I_{ns}^* + 2 \frac{D_2^*}{\beta^2} I_{mr}^* I_{ns}^* + D_2^* I_{mr}^* I_{ns}^* + 4 \frac{D_3^*}{\beta^2} I_{mr}^* I_{ns}^* + 4 \frac{D_4^*}{\beta} I_{mr}^* I_{ns}^*$$

$$F_{mrns} = I_{mr}^* I_{ns}^* \quad G_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^* I_{ns}^* \quad \lambda_v^* = \rho h \omega_{mn}^2 \frac{b^*}{D_1^*} \quad \lambda_b = N_x \frac{b^2}{D_1^*}$$

$I_{mr}^*, I_{ns}^*, \dots, h_m, h_r, \bar{h}_m, \bar{h}_s$ およびその微分からなる定積分

$\lambda_b=0$ とおけば、自由振動の固有値 λ_v が得られ、 $\lambda_v=0$ とおけば座屈固有値 λ_b が得られる。数値計算においては、式(6)を行列の固有値問題として解くことができる。

3. 数値結果

(1) 解の精度 カップリングを考慮した場合の長方形板の力学的境界条件は、カップリングを考慮した場合と異なってくる。このため、力学的境界条件を満足する必要のない Rayleigh-Ritz法が Galerkin法より有利である。本研究ではたわみ関数にはりの座屈波形を用いている。この場合、CASE IV では両者による解が全く一致するが、CASE I ~ CASE III では、 θ が 15° を越えると両者に差が生じてくる。したがって Galerkin法ではりの座屈波形以外の関数を使う必要がある。

(2) 固有振動解析 図-2 に全周辺固定正方形板 (CASE IV, $\beta=1.0$) の固有振動特性を示す。縦軸 ω^* は無次元固有振動数 (等方性板の1次の固有振動数で無次元化)、横軸 θ はラミナの繊維方向である。異方性の度合いが小さい EGLASS/EP と大きい GRAPHITE/EP を用いて計算を行なっている。図のように、カップリングの効果は $\theta=45^\circ$ で最も大きくなる。また、振動数に及ぼすカップリング効果は振動形によって異なる。

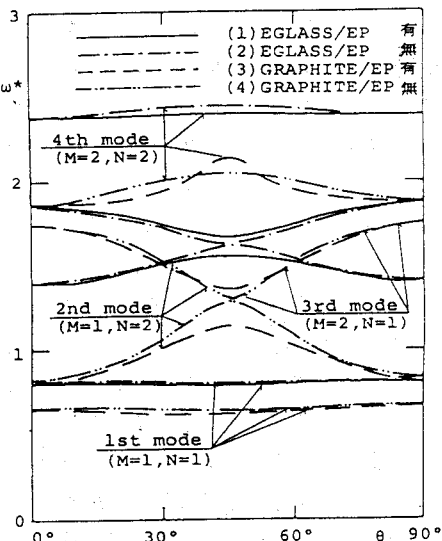


図-2 正方形板の固有振動特性

(3) 座屈解析 図-3 に全周辺固定長方形板 (CASE IV, EGLASS/EP, GRAPHITE/EP) の $\theta=0^\circ$ および 30° のカップリング項の有無による座屈曲線を示す。縦軸 λ_b は座屈固有値、横軸 β は縦横比をとった。繊維方向が 0° の場合はカップリング項の有無にかかわらず同じ曲線を示すが、 30° になると座屈荷重に異差が見られ、カップリング項を無視した場合が大きな座屈荷重となる。

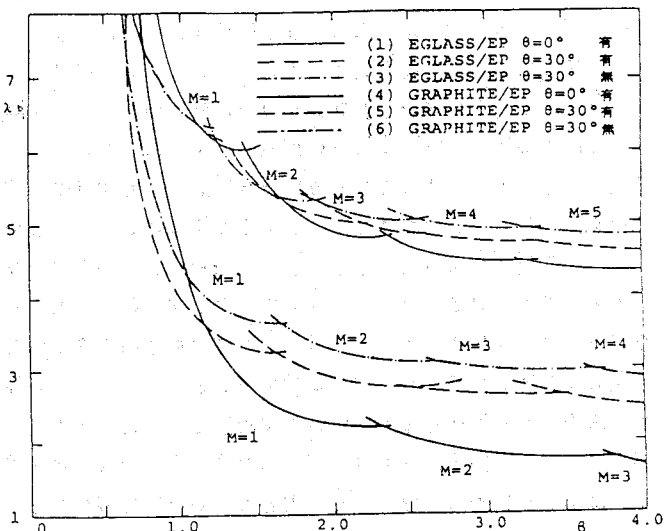


図-3 長方形板の座屈曲線

4. まとめ 各種境界条件をもつ積層板のカップリング項の評価については講演時に発表する。

参考文献

- 1) 高橋、江島、横山: 長崎大学工学部研究報告, 第22巻, 第39号 pp, 209-216, 1992.
- 2) 福田: 異方性の積極利用(1), 日本複合材料学会誌, 14-1, 1988.