変厚偏平シェルの非線形解析

長崎大学　工学部　○学生員　田頭直幸
長崎大学　工学部　正員　松田浩
長崎大学　工学部　正員　森田千尋
大日本コンサルタント（株）　正員　川神雅秀

1．まえがき

著者らの一部はこれまで、平板や偏平シェルについて、その基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより得られる離散的一般解に基づく離散化手法を用いて、既往の解析結果と比較し本解析手法の妥当性を検討してきた[1)2)]。本研究は、その応用として、先に述べた離散化手法を用いて一般的な変厚偏平シェルに関して、非線形性を考慮し、さらに周辺支持条件の違いによる有限変形挙動を明らかにする。

2．偏平シェルの増分形基礎微分方程式および離散的一般解

曲面のx、y方向の曲率をk_x、k_y、ねじれ率をk_{xy}とし、これらがあまり大きくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。せん断力をQ_y、Q_x、ねじりモーメントをM_{xy}、曲げモーメントをM_y、M_x、たわみ角をθ_y、θ_x、板厚中央面上のx、y方向の面内変位成分をu、vおよび垂直方向の変位成分をw、面内力をN_{xy}、N_y、N_xとすれば、せん断変形の影響を考慮した偏平シェルの曲げに関する増分形の基礎微分方程式は次のように表せる。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y}-k_x\Delta Q_x=0 \quad (1\text{-}1) \qquad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y}+\frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x}-k_y\Delta Q_y=0 \quad (1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y}+\Delta N_x\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k_x\right]+\Delta N_y\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k_y\right]+2\Delta N_{xy}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+k_{xy}\right]$$
$$+N_x\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x\partial y}+\Delta q+\Delta N_c=0 \quad (1\text{-}3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y}-\Delta Q_x=0 \quad (1\text{-}4) \qquad \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y}+\frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x}-\Delta Q_y=0 \quad (1\text{-}5)$$

$$\frac{\partial \Delta\theta_x}{\partial x}=\frac{1}{D(1-\nu^2)}(\Delta M_x-\nu\Delta M_y) \quad (1\text{-}6) \qquad \frac{\partial \Delta\theta_y}{\partial y}=\frac{1}{D(1-\nu^2)}(\Delta M_y-\nu\Delta M_x) \quad (1\text{-}7)$$

$$\frac{\partial \Delta\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \Delta\theta_y}{\partial x}=\frac{1}{D(1-\nu^2)}\Delta M_{xy} \quad (1\text{-}8) \qquad \frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\Delta\theta_x=\frac{\Delta Q_x}{\kappa Gh} \quad (1\text{-}9)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\Delta\theta_y=\frac{\Delta Q_y}{\kappa Gh} \quad (1\text{-}10)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x}-k_x\Delta w+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\Delta W_{xc}=\frac{1}{Fh}(\Delta N_x-\nu\Delta N_y) \quad (1\text{-}11)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y}-k_y\Delta w+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\Delta W_{yc}=\frac{1}{Fh}(\Delta N_y-\nu\Delta N_x) \quad (1\text{-}12)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y}+\frac{\partial \Delta v}{\partial x}-2k_{xy}\Delta w+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\Delta W_{xyc}=\frac{2(1+\nu)}{Fh}\Delta N_{xy} \quad (1\text{-}13)$$

ここに、$q=q(x,y)$:面に対する垂直方向荷重強度，$D=D(x,y)=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$:シェルの曲げ剛度，
E:弾性係数，$G=E/[2(1+\nu)]$:せん断弾性係数，$\kappa=5/6$:せん断修正係数，$h=h(x,y)$:シェル厚，
$F=F(x,y)=Eh/(1-\nu^2)$:シェルの伸び剛度，ν:ポアソン比，Δ:断面力および変形量の増分，
ΔN_c, ΔW_{xc}, ΔW_{yc}, ΔW_{xyc}:各荷重増分段階における不平衡力および非線形項

また、これらの基礎微分方程式(1-1)～(1-13)において、以下に示す無次元量X_1～X_{13}およびη、ζ

$X_1=a^2Q_y/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_2=a^2Q_x/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_3=aM_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_4=aM_y/[D_0(1-\nu^2)]$,
$X_5=aM_x/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_6=\theta_y$, $X_7=\theta_x$, $X_8=w/a$, $X_9=v/a$, $X_{10}=u/a$, $X_{11}=a^2N_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$,
$X_{12}=a^2N_y/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_{13}=a^2N_x/[D_0(1-\nu^2)]$, $\eta=x/a$, $\zeta=y/a$,

a, b:偏平シェルの矩形Baseの辺長, $\mu=b/a$, h_0:基準シェル厚, $D_0=Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$:基準シェル剛度を導入し無次元化後、領域$[i, j]$において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シェルの縦、横の等分割線の交点に関する離散解ΔX_{pij}(p=1～13)は、次のように整理される。

$$\Delta X_{pij}=\sum_{d=1}^{10}\left(\sum_{k=0}^{i}a_{pijkd}\cdot\Delta X_{rk0}+\sum_{l=0}^{j}b_{pijld}\cdot\Delta X_{s0l}\right)+\Delta q_{pij} \quad (2)$$

この離散的一般解ΔX_{pij}を求める方法の詳細については、文献1)を参照されたい。

3. 解析結果

等分布荷重を満載する四辺単純支持（Pin）された境界条件を持つ変厚偏平E．Pシェル（Fig. 1)に関して、αを -0.2～0.2 まで変化させた場合の荷重～たわみ曲線をFig. 2に示す。また、周辺が単純支持（Roller, Pin)、固定支持(Clamped)された場合の境界条件を持つ E．P．シェルに等分布荷重が満載される場合の、荷重～たわみ曲線を Fig. 3に示す。

$a=10m$
$H=0.25m$
$E=2.1\times10^6 kg/cm^2$
$\nu=0.3$
$\bar{q}=q\dfrac{a^4}{64Eh_0^2H^2}$
$w_{av}=\dfrac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\dfrac{w}{h_0}dxdy$

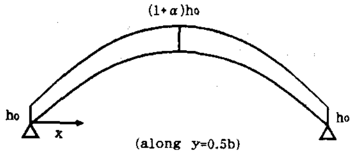

Fig.1 変厚偏平シェル

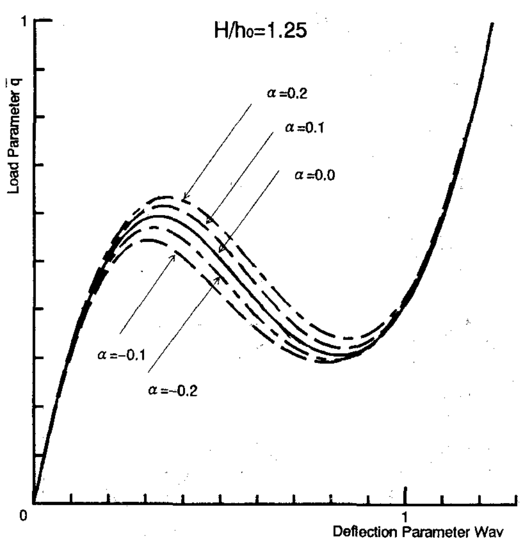

Fig.2 変厚 E.P.SHELL の荷重～たわみ曲線

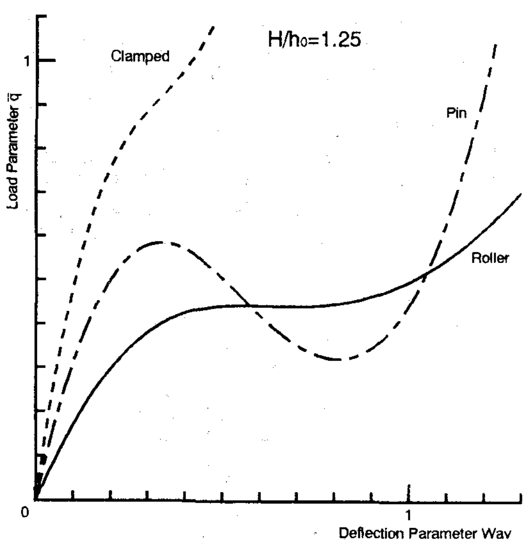

Fig.3 E.P.SHELLの荷重～たわみ曲線

［参考文献］

1）崎山毅・松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp. 21-28, 1983.

2）松田・森田・崎山・鶴田・若菜:偏平シェル構造の弾性曲げ解析, 構造論集, Vol38A, pp. 31-42, 1992.