

座標変換により誘導した平面応力要素を用いた一解析法について

熊本大学 学生員○平川 龍一 熊本大学 正 員 山尾 敏孝
熊本大学 学生員 日野 雅夫

1. まえがき： 従来の平面応力問題においては、誘導の容易さ、使用しやすさ等によりひずみ一定要素が良く用いられていた。しかし精度を上げるため分割数が多くなり、また面内回転剛性の欠如という問題があった。ここでは、要素分割数を減らしてかつ、面内回転剛性を考慮できる1節点3自由度を有する平面応力要素を線形ひずみ要素より誘導し、その解析精度について検討を行ったものである。

2. 要素剛性マトリックスの誘導：

1) 線形ひずみ要素 図1に示すような頂点と辺の中点に節点を持つ6節点の三角形要素を考える。この時の要素内の変位場を面積座標を用いた次の内挿関数で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= (2\xi_1-1)\xi_1 u_1 + (2\xi_2-1)\xi_2 u_2 + (2\xi_3-1)\xi_3 u_3 + 4\xi_1\xi_2 u_4 + 4\xi_2\xi_3 u_5 + 4\xi_1\xi_3 u_6 \\ v &= (2\xi_1-1)\xi_1 v_1 + (2\xi_2-1)\xi_2 v_2 + (2\xi_3-1)\xi_3 v_3 + 4\xi_1\xi_2 v_4 + 4\xi_2\xi_3 v_5 + 4\xi_1\xi_3 v_6 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ここに } \xi_i = \frac{A_i}{A} \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{また} \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (2)$$

ひずみと変位の関係式に、式(1)を代入し整理すると、次式が求まる。

$$\{e\} = [B] \{d\} \quad \text{ここに } \{d\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6\} \quad (3)$$

[B] マトリックスの内容については、文献1)と同様であり、{d}は節点変位ベクトルである。従って剛性マトリックスは次式で与えられる。

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t \, dA \quad \text{ここに } [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

t : 三角形要素の板厚 E : ヤング率 ν : ポアソン比

2) 座標変換による新しい三角形要素の誘導

1) で求めた線形ひずみ要素は、6節点で各節点の自由度は2 (u, v) である。図2 (a)に示すように、ここで各辺の中点変位を両端の節点変位と回転項 θ を加えて表す事を考える。図2 (b)のように線形ひずみ要素の辺12に回転 $\theta_1 = 1$ をかけると、辺に垂直方向の変位 u_n は次式(5)で表せる。

$$u_n = -\frac{s(1_3-s)^2}{1_3^2} \quad (5) \quad u_n = 1_3 \frac{\theta_2 - \theta_1}{8} \quad (6)$$

sは節点1を原点に辺12の方向の座標である。 $\theta_2 = 1$ をかけた時も同様なので、中点の変位は式(6)で

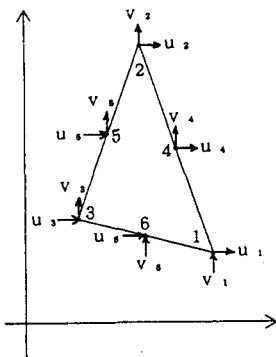


図1 線形ひずみ要素

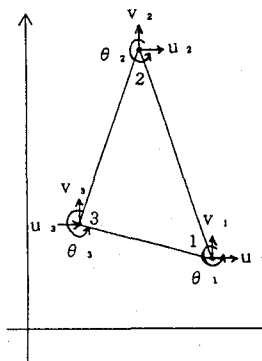
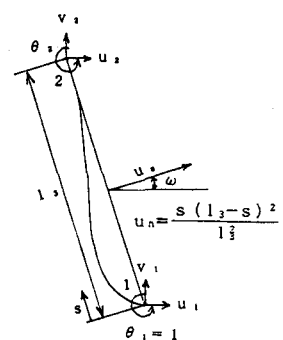


図2 (a) 新しい線形ひずみ要素



(b) 辺12

表せる。これを x, y 方向の成分に分けて、節点4の変位を求めると次式で表せる。

$$u_4=\frac{(u_1+u_2)}{2}+(y_2-y_1)\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{8}\right), \quad v_4=\frac{(v_1+v_2)}{2}+(x_2-x_1)\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{8}\right) \tag{7}$$

同様に他の中点 u_5, v_5, u_6, v_6 も表す事ができる。これらをマトリックスで表すと

$$\begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & b_3 & \frac{1}{2} & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & a_3 & 0 & \frac{1}{2} & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & b_1 & \frac{1}{2} & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & a_1 & 0 & \frac{1}{2} & -a_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & b_2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(x_3-x_2)}{8}, & b_1 &= \frac{(y_2-y_3)}{8} \\ a_2 &= \frac{(x_1-x_3)}{8}, & b_2 &= \frac{(y_3-y_1)}{8} \\ a_3 &= \frac{(x_2-x_1)}{8}, & b_3 &= \frac{(y_1-y_2)}{8} \end{aligned}$$

となり、6節点の変位と新しい三角形の節点変位 $\{d^*\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}$ の関係が座標変換マトリックス $[T]$ により次式(9)で表せる。新しい三角形要素の剛性マトリックス $[k^*]$ は変換マトリックス $[T]$ を用いて次式(10)で表せる。

$$\{d\} = [T] \{d^*\} \tag{9} \qquad [k^*] = [T]^T [k] [T] \tag{10}$$

3. 解析結果と考察:

図3のような片持ちばりを解析モデルとし、一定ひずみ要素 (CST) と従来の線形ひずみ要素 (LST)、新しく誘導した線形ひずみ要素 (LSTN) との比較を行う。図4は変位曲線で、図5は、自由端の変位の精度と総自由度の関係を表したものである。なお、理論値 V_t は、せん断変形を考慮している。従来のひずみ一定要素に比べて新しい線形ひずみ要素 (LSTN) は、要素分割数を減らすことができ、かつ十分な精度を得る事ができると思われる。他の解析モデルに適用した結果は講演当日に発表の予定である。

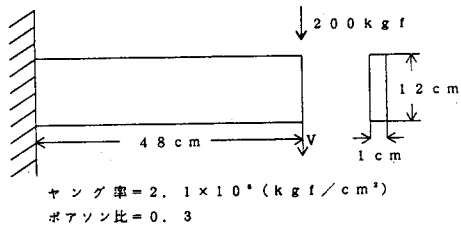


図3 解析モデル

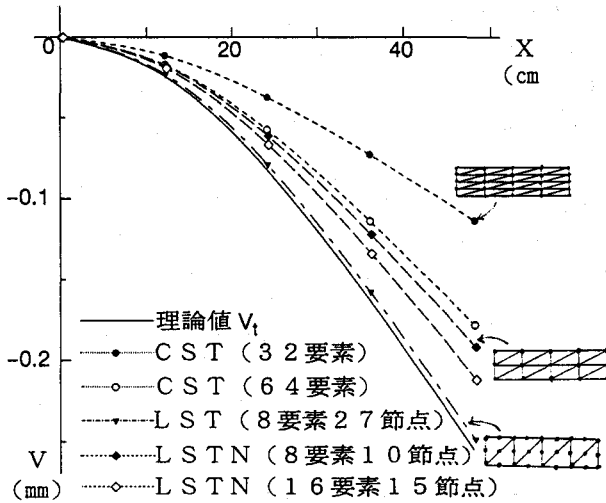


図4 変位曲線

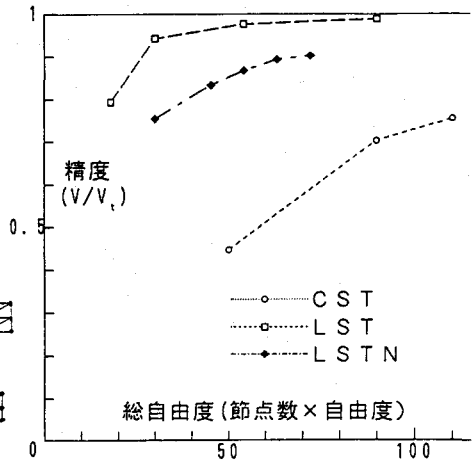


図5 総自由度と精度の関係

参考文献 1) 鷲津ら:有限要素法ハンドブック, 1981. 9 2) Cook, R. D., "On the Allman...", 1986