

エネルギー法によるトラスの有限変位解析

熊本大学工学部	学生員	○鳥飼 成一
同 上	正 員	三池 亮次
同 上	正 員	小林 一郎
佐伯鶴岡高校	正 員	佐藤 啓治

1. はじめに 有限変位仮想仕事の定理に従い、我々はさきに、骨組構造大変形の基礎式を導いた¹⁾。また、この大変形基礎式を変位 Δd で微分し、接続マトリックス C を用いた幾何剛性マトリックス K_G の一般式を誘導し、簡単な2部材ミーゼストラスを例に後座屈挙動や屈伏・分岐座屈挙動を解析し²⁾座屈荷重は、Timoshenko³⁾の解と一致することを示した。ここでは多くの部材を有する立体トラスを対象として、 K_G を求めるアルゴリズムを開発し、屈伏・分岐座屈挙動や、有限変位解析を試みる。

2. 幾何剛性マトリックスの一般式 エネルギー法による骨組構造大変形解析の基礎式は、

$$\Delta p = K \Delta d + b \quad (1)$$

のように与えられる。ここに、 Δp は変形の間状態からの増分荷重、 K は増分後の全体剛性マトリックス、 Δd は増分変位、 b は有限変位に対する補正項である。また、 $K = (C' + \Delta C) K_m (C' + \Delta C)^T$ 、 $b = \Delta C p_m - (C' + \Delta C) K_m \Delta e_m$ 、 C' は中間状態における接続マトリックス、 K_m は部材剛性マトリックスで、トラスの場合 パネ定数 $K = EA_0 / l_0$ からなる対角マトリックス、 E はヤング率、 A は部材断面積、 l は部材長、添字①は第I部材を意味する。 p_m は中間荷重の部材断面力で、トラスの場合には、軸力 N によって構成されるベクトルである。(1)式を変位 $\Delta d = \{\Delta d_i\}$ で微分すると

$$\delta \Delta p = (K_E + K_G) \delta \Delta d = K_T \delta \Delta d \quad (2)$$

ここに、 K_E は弾性剛性マトリックス、 K_G は幾何剛性マトリックスで

$$K_E = C' K_m C'^T, \quad K_G = \frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d} \otimes p_m' \\ \equiv \left[\frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d_1} p_m', \frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d_2} p_m', \dots \right] \quad (3)$$

のように定義する。なお Δe_m は2次の微小項であるので、ここでは無視する。後藤⁴⁾による大変形解析も、接続マトリックスを用いたものであるが、上記の式はより汎用の定式化である。

3. 3次元トラス部材の接続マトリックスの微分

変形の間状態において3次元トラスの図-1に示す第①部材の長さを

$$l_0 = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \quad (4)$$

その方向余弦は $l_0 T = [\lambda', \mu', \nu']$ とする

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{x_2' - x_1'}{l_0} \\ \mu' &= \frac{y_2' - y_1'}{l_0} \\ \nu' &= \frac{z_2' - z_1'}{l_0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

始端Aと終端Bにおける x, y, z の軸方向変位を

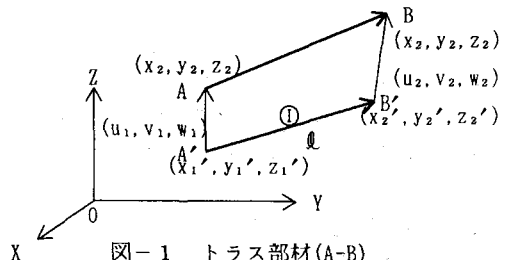


図-1 トラス部材(A-B)
中間状態からの変位

$(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), x_1 = x_1' + u_1, y_1 = y_1' + v_1, \dots, x_2 = x_2' + u_2, y_2 = y_2' + v_2, \dots$ とする。変形後の部材長 l 、方向余弦で構成される単位ベクトル $\mathbf{l}$ とする。接続マトリックス $(\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})$ は、各部材の $\mathbf{l}_0$ で構成され、 $\mathbf{l}$ の変位による微分は、

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda'^2)/l' \\ \lambda' \mu' / l' \\ \lambda' \nu' / l' \end{pmatrix}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v_1} = \begin{pmatrix} -\mu' \lambda' / l' \\ -(1-\mu'^2)/l' \\ \mu' \nu' / l' \end{pmatrix}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial w_1} = \begin{pmatrix} \nu' \lambda' / l' \\ \nu' \mu' / l' \\ -(1-\nu'^2)/l' \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_2} = -\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v_2} = -\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial v_1}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial w_2} = -\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial w_1}$$

4. 有限変形及び大変形座屈解析 大変形骨組構造解析において、荷重による骨組の形状が大きく変化するので、 $\mathbf{K}_E$ も $\mathbf{K}_G$ も荷重 $\mathbf{p}$ の関数となるから座屈荷重を求めるのが困難になる。

最初に、変位が比較的微小である場合、(3)式に基づく座屈解析を試みる。すでに 2 部材ミーゼストラスにおいて、斜角が 45° より大きい場合は分岐、 45° より小さい場合は屈伏座屈することが指摘された²⁾。一般に多部材の立体トラスでは、式(3)における $\mathbf{p}_m$ に代わり、荷重 $\mathbf{p}$ を次のように用いる。変位が比較的小さい場合には、荷重 $\mathbf{p}$ と変形後の接続マトリックス $\mathbf{C}$ を用い、式(1)の代わりに、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{C}^T \mathbf{d} - \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{e}_m \theta \\ &= \mathbf{K}_E \mathbf{d} - \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{e}_m \theta \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。ここに $\mathbf{d}$ は変位、 $\mathbf{e}_m \theta$ は $(1 - \cos \theta) / l'$ を要素とする伸びの付加項のベクトルで変位が小さいとき無視される。部材断面力 $\mathbf{p}_m$ は

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m (\mathbf{C}^T \mathbf{d} - \mathbf{e}_m \theta) \quad (8)$$

式(7)より、変位 $\mathbf{d}$ を求め、式(8)に代入すると

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{D} \mathbf{p} + \mathbf{c} \quad (9)$$

ここに $\mathbf{D} = \mathbf{K}_m \mathbf{C}^T \mathbf{K}_E^{-1}$, $\mathbf{c} = (\mathbf{D} \mathbf{C} - \mathbf{I}) \mathbf{K}_m \mathbf{e}_m \theta$

式(7)を、式(3)に用いる。また、 $\mathbf{p} = -\lambda \mathbf{p}_0$ とすると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p} &= \left(\mathbf{K}_E + \frac{\partial (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})}{\partial \mathbf{d}} \otimes \mathbf{p}_m \right) \delta \mathbf{d} \\ &= \left((\mathbf{K}_E + \frac{\partial (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})}{\partial \mathbf{d}} \otimes \mathbf{c}) - \lambda \frac{\partial (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})}{\partial \mathbf{d}} \otimes \mathbf{D} \mathbf{p}_0 \right) \delta \mathbf{d} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \mathbf{K}_E & -\lambda \mathbf{K}_G \end{pmatrix} \delta \mathbf{d} \\ \mathbf{K}_E &= \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{C}^T + \frac{\partial (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})}{\partial \mathbf{d}} \otimes \mathbf{c}, \mathbf{K}_G = \frac{\partial (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C})}{\partial \mathbf{d}} \otimes \mathbf{D} \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

であり、固有値解析により

座屈荷重 $\lambda \mathbf{p}_0$ を得る。数値解析は熊本大学 高場 悦朗君の協力を得たことを記し謝意を表する。

参考文献 1) Miike, R., Kobayashi, I., Yamada, Z.: Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, EM10, ASCE, Feb. 1990. 2) 佐藤啓治、三池亮次、小林一郎、竹下克弥、骨組構造の幾何剛性マトリックスの一般式の誘導、土木学会年次学術講演会、1992年9月。3) Timoshenko, S. P., Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill, 1961. 4) 後藤茂夫、羽根悟朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析、土木学会論文報告集 238号 1975年6月