任意形状境界をもつ重み付差分法による今津湾潮流解析

九州産業大学　正員　加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東　和　大学　正員　空閑幸雄

1．まえがき　海水交換性の悪い海域などの閉鎖性海域では、富栄養化問題及びウォーターフロント開発を行う場合の水質や潮流の環境評価を調べる必要がある。本報では、移流拡散解析において従来の差分法が有限要素法や境界要素法と比較して、欠点と見なされていた不規則な境界領域への精度の高い適用を可能にした任意形状境界を有する重み付差分法[1)]で潮流解析を行うこととし、その定式化および重みの定め方を示したものである。

2．基礎方程式　基礎方程式は三次元のレイノルズ方程式を海底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した二次元の運動方程式〔式（1）にx方向のみ示す〕及び連続の式（2）とする[2)]。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial y}=-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \tag{2}$$

ここに、$M=U(h+\zeta)$，$N=V(h+\zeta)$ はおのおのx，y方向の線流量、U，Vはそれぞれx，y方向の平均流速、ζ は水面の平均水面からの高さ、W_x，W_y はx，y方向の風速成分、g は重力の加速度、f はコリオリ係数、ε は水平方向の渦動粘性係数、ρ_a，ρ_w は空気および水の密度、$\delta=1\sim1.5$ の補正係数、γ_b，γ_s は水底、水面における摩擦係数である。また、流速ベクトル　$V=\sqrt{U^2+V^2}$　とする。

3．任意形状境界を有する重み付差分法の定め方　従来の差分法は、任意の幾何学形状をもつ領域の境界条件への精度の高い対応に欠点を持っていた。そこで、移流拡散解析において任意の幾何学形状へ対応できた重み付差分法で潮流解析をすることとし、以下のように考える。まず、二次元運動方程式（1）を解析するための重み付差分法の求め方とその用い方を以下に述べよう。いま基礎式（1）において式（3）、（4）のように表わし、F_Lを非同次項とみなして式（1）を式（5）と書き直す。まず、$F_L=0$とした同次形の方程式について、考える点◎（x_0, y_0, t_0）の関数値をその近接点① ～ ⓝ（x_1, y_1, t_1 • • • x_n, y_n, t_n） の重み付加算値と考えて式（6）と記す。（i点の重みをP_iとする） 次に、非同次項を含めた式（1）に近似な重み付差分法を定めるために、式（6）に既知である非同次項F_Lによる項を付け加えて式

$$\frac{M}{h+\zeta}=m\ ,\ \frac{N}{h+\zeta}=n \tag{3}$$

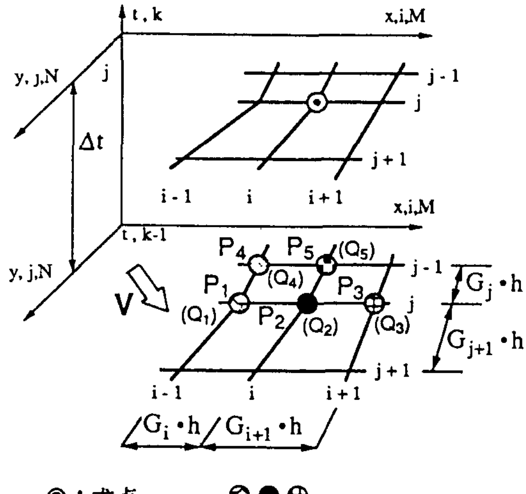
$$-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 w_x\sqrt{w_x^2+w_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)}M\sqrt{M^2+N^2}+fN=F_L \tag{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=F_L \tag{5}$$

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot M(i) \tag{6}$$

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot M_L(i)+\sum_{j=1}^{m}Q_j\cdot F_L(j) \tag{7}$$

$$M^r(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{r-2i}\cdot\frac{(2\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \tag{8}$$



◉：求点、　⊘ ● ⊕ ○ ◒ ：既知点

図1　二次元差分モデル

（7）とする。式（7）を決定するために、まず式（5）において$F_L=0$とおいた同次形の式を満たす重み付差分法を次の様にして求める。即ち、同次形の式を満たすx，y，tの多項式は式(8)で表わされる。いま、同次形の式において原点を任意の点に移し、差分格子間隔を、$\Delta x=G_i h$、$\Delta y=G_j h$、$\Delta t=k=Rh^2$ とし、原点のごく近くを考えて、x，y，tを離散化して$x=p_1G_ih$、$y=p_2G_jh$、$t=qRh^2$と表わす。ここに、p_1，p_2，qは0，±1，±2 のような大きくない整数。ここで、図1の近接点5個を用い、この5個5種類の重みを定めるために式(8)において、r＝0，1，2，3，4とおいて得られるMの値を重み付差分式(9)に代入すれば連立方程式（10）が得られ、これを解けばP_iの値が定まる。次にP_iが決まった上でさらに図1の重み係数Q_jを、式

$$M(i,j,k)=P_1\cdot M(i-1,j,k-1)+P_2\cdot M(i,j,k-1)+P_3\cdot M(i+1,j,k-1)+P_4\cdot M(i-1,j-1,k-1)+P_5\cdot M(i,j-1,k-1) \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -G_i+F_* & F_* & G_i+F_* & -G_i-G_j+F_* & -G_j+F_* \\ (-G_i+F_*)^2/2!-2\mu & (F_*)^2/2!-2\mu & (G_i+F_*)^2/2!-2\mu & (-G_i-G_j+F_*)^2/2!-2\mu & (-G_j+F_*)^2/2!-2\mu \\ \begin{array}{c}(-G_i+F_*)^3/3!\\-2(-G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{c}(F_*)^3/3!\\-2F_*\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{c}(G_i+F_*)^3/3!\\-2(G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{c}(-G_i-G_j+F_*)^3/3!\\-2(-G_i-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{c}(-G_j+F_*)^3/3!\\-2(-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^4/4!\\-(-G_i+F_*)^2\cdot\mu+2\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}(F_*)^4/4!\\-F_*^2\cdot\mu+2\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^4/4!\\-(G_i+F_*)^2\cdot\mu+2\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^4/4!\\-(-G_i-G_j+F_*)^2\cdot\mu+2\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^4/4!\\-(-G_j+F_*)^2\cdot\mu+2\mu^2\end{array} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\left(F_x=\frac{m\Delta t}{\Delta x}\ ,\ F_y=\frac{n\Delta t}{\Delta y}\ ,\ F_*=G_iF_x+G_jF_y\ ,\ \mu=\frac{\varepsilon\cdot\Delta t}{h}\right)$$

$$F_L=-(L-2)!\sum_{i=0}^{L/2-1}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{L-2-2i}}{(L-2-2i)!}\cdot\frac{(\varepsilon t)^i}{i!}\right\}\ ,\qquad M_L=\frac{(L-2)!}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{L/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{L-2i}}{(L-2i)!}\cdot\frac{(\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} M(i,j,k)=&\,P_1\cdot M(i-1,j,k-1)+P_2\cdot M(i,j,k-1)+P_3\cdot M(i+1,j,k-1)+P_4\cdot M(i-1,j-1,k-1)+P_5\cdot M(i,j-1,k-1) \\ &+Q_1\cdot F(i-1,j,k-1)+Q_2\cdot F(i,j,k-1)+Q_3\cdot F(i+1,j,k-1)+Q_4\cdot F(i-1,j-1,k-1)+Q_5\cdot F(i,j-1,k-1) \end{aligned} \tag{12}$$

（7）が式（5）を満たす様に定める。いま与えられた微分方程式（5）の右辺を次々にある既知関数F_L（Ｌ＝１，２，・・・・）でおきかえて得られる微分方程式の特殊解の一つをそれぞれM_Lとすれば、これらの関数はそれぞれ式（7）の関係を満たしている。そこで、式（5）を満たす F_LとM_L の組み合わせを求めれば式（１１）を得る。この様にして求めたF_LとM_Lの組み合わせを同次方程式におけると同様に離散化をほどこし、図１に示すように、５点５種類の近接点で差分モデルを考えて、式（１２）の重み付差分式を得る。次に、原点を考える点に移し、式(１１)において得られた（F_2,M_2）・・・・（F_6,M_6）のＦとＭの組みの値および、式（6）のF_L＝０とおいた同次形を満たすように求めたP_1・・・・P_5の値を式（１２）に代入すれば、連立方程式（１３）が求まる。これを解いて重みQ_1・・・・Q_5 が定まる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-G_i+F_*) & F_* & (G_i+F_*) & (-G_i-G_j+F_*) & (-G_j+F_*) \\ (-G_i+F_*)^2+\mu & F_*^2+\mu & (G_i+F_*)^2+\mu & (-G_i-G_j+F_*)^2+\mu & (-G_j+F_*)^2+\mu \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^3/3!\\-(-G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}F_*^3/3!\\-F_*\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^3/3!\\-(G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^3/3!\\-(-G_i-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^3/3!\\-(-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^4/4!\\-(-G_i+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2!\end{array} & \begin{array}{l}F_*^4/4!\\-F_*^2\cdot\mu/2!\\+\mu^2/2!\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^4/4!\\-(G_i+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2!\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^4/4!\\-(G_i-G_j+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2!\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^4/4!\\-(-G_j+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2!\end{array} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{h^2}{\varepsilon}\begin{bmatrix} (-G_i+F_*)^2/2!-\mu & F_*^2/2!-\mu & (G_i+F_*)^2/2!-\mu & (-G_i-G_j+F_*)^2/2!-\mu & (-G_j+F_*)^2/2!-\mu \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^3/3!\\-(-G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}F_*^3/3!\\-F_*\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^3/3!\\-(G_i+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^3/3!\\-(-G_i-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^3/3!\\-(-G_j+F_*)\cdot\mu\end{array} \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^4/4!\\-(-G_i+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2\end{array} & \begin{array}{l}F_*^4/4!\\-F_*^2\cdot\mu/2!\\+\mu^2/2\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^4/4!\\-(G_i+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^4/4!\\-(G_i-G_j+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^4/4!\\-(-G_j+F_*)^2\\\cdot\mu/2!+\mu^2/2\end{array} \\ \begin{array}{l}3!(-G_i+F_*)^5/5!\\-(-G_i+F_*)^3\cdot\mu\\+3(-G_i+F_*)\cdot\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}3!F_*^5/5!\\-F_*^3\cdot\mu\\+3F_*\cdot\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}3!(G_i+F_*)^5/5!\\-(G_i+F_*)^3\cdot\mu\\+3(G_i+F_*)\cdot\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}3!(-G_i-G_j+F_*)^5/5!\\-(-G_i-G_j+F_*)^3\cdot\mu\\+3(-G_i-G_j+F_*)\cdot\mu^2\end{array} & \begin{array}{l}3!(-G_j+F_*)^5/5!\\-(-G_j+F_*)^3\cdot\mu\\+3(-G_j+F_*)\cdot\mu^2\end{array} \\ \begin{array}{l}(-G_i+F_*)^6/6!\\-(-G_i+F_*)^4\cdot\mu/4!\\+(-G_i+F_*)^2\cdot\mu^2/2!\\\cdot2!-\mu^3/3!\end{array} & \begin{array}{l}F_*^6/6!-F_*^4\\\cdot\mu/4!+F_*^2\\\cdot\mu^2/2!\cdot2!\\-\mu^3/3!\end{array} & \begin{array}{l}(G_i+F_*)^6/6!\\-(G_i+F_*)^4\cdot\mu/4!\\+(G_i+F_*)^2\cdot\mu^2/2!\\\cdot2!-\mu^3/3!\end{array} & \begin{array}{l}(-G_i-G_j+F_*)^6/6!\\-(-G_i-G_j+F_*)^4\cdot\mu/4!\\+(-G_i-G_j+F_*)^2\cdot\mu^2/2!\\\cdot2!-\mu^3/3!\end{array} & \begin{array}{l}(-G_j+F_*)^6/6!\\-(-G_j+F_*)^4\cdot\mu/4!\\+(-G_j+F_*)^2\cdot\mu^2/2!\\\cdot2!-\mu^3/3!\end{array} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \tag{13}$$

参考文献

１）加納・赤坂・川村・空閑：不規則境界をもつ二次元重み付差分法、　昭和６０年度西部支部年講

２）加納・赤坂・空閑：重み付差分法の潮流解析への応用、　平成３年度年講第２部