

一般曲線座標による堰のまわりの流れの数値計算

長崎大学工学部 学生員 ○前田繁房 森元賢哉

長崎大学海洋生産科学研究科 正員 薦田廣章

1. はじめに

一般曲線座標を用いて自由表面を有する堰のまわりの流れを解析したので報告する。このコードは以下の特徴を持っている。

- ・基礎式を一般曲線座標で展開しているので、任意の境界形状を取り扱うことが可能である。
- ・移流項の差分化に際し3次精度のQUICKスキームを用いているので、非物理的振動を防ぐことができる。
- ・自由表面の境界条件(運動学的、力学的および連続)を考慮している。
- ・乱流場が解析できるように標準的な $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルを組み込んでいる。

2. 基礎方程式

(ξ, η) 座標を用いた2次元非圧縮性粘性流体のレイノルズ方程式および連続方程式は以下のようになる。

$$q_x + E_y + F_\eta = \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) R \right\}_\xi + \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) S \right\}_\eta + T \quad (1)$$

$$q = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad E = J^{-1} \begin{bmatrix} U \\ uU + \xi_{xx}\hat{p} \\ vU + \xi_{xy}\hat{p} \end{bmatrix}, \quad F = J^{-1} \begin{bmatrix} v \\ uV + \eta_{xx}\hat{p} \\ vV + \eta_{xy}\hat{p} \end{bmatrix}, \quad T = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_x \\ g_y \end{bmatrix},$$

$$R = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ (2\xi_{xx}\hat{\eta} + \xi_{yy}^2)u + (2\xi_{xy}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})u + \xi_{yy}(\xi_{xx}v + \eta_{xx}v) \\ (\xi_{xx}^2 + 2\xi_{yy}^2)v + (\xi_{xx}\eta_{xx} + 2\xi_{yy}\eta_{yy})v + \xi_{xx}(\xi_{yy}u + \eta_{yy}u) \end{bmatrix}$$

$$S = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ (2\xi_{xy}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})u + (2\eta_{xx}^2 + \eta_{yy}^2)u + \eta_{yy}(\xi_{xx}v + \eta_{xx}v) \\ (\xi_{xy}\eta_{xx} + 2\xi_{yy}\eta_{yy})v + (\eta_{xx}^2 + 2\eta_{yy}^2)v + \eta_{xx}(\xi_{yy}u + \eta_{yy}u) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 u, v は x, y 方向の平均流速成分、 $\hat{p}$ は圧力($\hat{p} = p + 2/3k$)、 Re はレイノルズ数、 g_x, g_y は重力加速度成分である。また、 ν_t は渦動粘性係数であり、 $\nu_t = C_\mu k^2 \varepsilon^{-1}$ とおくことができる。 U, V, J は変換後の ξ, η 座標の流速成分およびJacobianで、以下の式で示される。

$$U = \xi_{xx}u + \xi_{xy}v, \quad v = \eta_{xx}u + \eta_{xy}v, \quad J = \xi_{xx}\eta_{yy} - \xi_{xy}\eta_{xx} \quad (3)$$

$k \sim \varepsilon$ の輸送方程式は下記のようになる。

$$(J^{-1}k)_\xi + (J^{-1}kU)_\eta + (J^{-1}kV)_\eta =$$

$$[J^{-1} \{ (\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2)k_\xi + (\xi_{xx}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})k_\eta \} (1/Re + \nu_t/\sigma_k)]_\xi$$

$$+ [J^{-1} \{ (\xi_{xx}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})k_\xi + (\eta_{xx}^2 + \eta_{yy}^2)k_\eta \} (1/Re + \nu_t/\sigma_k)]_\eta$$

$$+ J^{-1}\nu_t E_p - J^{-1}\varepsilon \quad (4)$$

$$(J^{-1}\varepsilon)_\xi + (J^{-1}\varepsilon U)_\eta + (J^{-1}\varepsilon V)_\eta =$$

$$[J^{-1} \{ (\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2)\varepsilon_\xi + (\xi_{xx}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})\varepsilon_\eta \} (1/Re + \nu_t/\sigma_\varepsilon)]_\xi$$

$$+ [J^{-1} \{ (\xi_{xx}\eta_{xx} + \xi_{yy}\eta_{yy})\varepsilon_\xi + (\eta_{xx}^2 + \eta_{yy}^2)\varepsilon_\eta \} (1/Re + \nu_t/\sigma_\varepsilon)]_\eta$$

$$+ J^{-1}C_1\nu_t\varepsilon k^{-1}E_p - J^{-1}C_2\varepsilon^2 k^{-1} \quad (5)$$

ここに、 E_p は次式で示される。

$$E_p = 2 [\{ (J^{-1}\xi_{xx}u)_\xi + (J^{-1}\eta_{xx}u)_\eta \} J]^2 + 2 [\{ (J^{-1}\xi_{xy}v)_\xi + (J^{-1}\eta_{xy}v)_\eta \} J]^2$$

$$[\{ (J^{-1}\xi_{yy}u + J^{-1}\xi_{xx}v)_\xi + (J^{-1}\eta_{yy}u + J^{-1}\eta_{xx}v)_\eta \} J]^2 \quad (6)$$

また、上記のモデル定数は標準的な $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルのそれを採用し、以下の数値を用いる。

$$C = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (7)$$

3. 自由表面における境界条件

ξ 軸を自由表面上にとる。曲線座標では η 軸は ξ 軸と一般には直交しない (Fig. 1)。

①運動学上の境界条件：これは、自由表面上の流体粒子はつねに自由表面上にあるという条件である。

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial \xi} = v \quad (8)$$

②力学上の境界条件：自由表面上で応力条件が満たされる必要がある。

法線方向および接線方向の応力成分を 0 とした。

$$\text{法線方向: } \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\text{接線方向: } \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_k} \right) = 0 \quad (10)$$

③連続条件: $\partial u_1 / \partial x_1 = \partial \xi_k / \partial x_1 \cdot \partial u_1 / \partial \xi_k = 0 \quad (11)$

ここでは、テンソル解析で用いられる通常の記号を用いた。

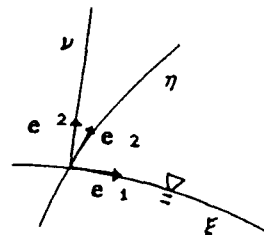


Fig.1 Free Surface

4. 時間積分

従来の方ではレイノルズ数が十分高くなると、移流項の変動が激しくなり、求められる流速成分は真の値から次第に外れてしまい、その結果、計算が発散するか真の解から大きく外れることになる。このような事態を避けるために、まず最初に 2 次精度の Adams-Bashfort 法を用い、さらに安定化のために、時間積分過程を Fractional ステップ法によって分割し、2 ステップ目に陰解法によって u^{n+1} 、 v^{n+1} および $p^{n+1/2}$ を求めた。すなわち 1 st ステップでは、移流項と粘性項の半分を用いて仮流速を求めた。2 nd ステップでは、粘性項の半分と圧力項を用い、陰的に流速場を求める。圧力場は同時に Poisson を解くことにより求められる。この 2 nd ステップを流速発散量が 0 になるまで繰り返す。

5. 数値計算

計算格子網は不等間隔の (130, 40) のグリッドとして、 $\delta x = 0.1$ 、最小 $\delta y = 0.015$ とした (Fig. 2)。また、 $Re = 20,000$ とした。流入、流出部の水深を単位長さとし、流入壁面、流出壁面では対数分布則の流速条件を与えた。底壁面では鉛直方向の流速成分を 0 とした。計算は当初グリッドを動かさずに無次元時間間隔の $\delta t = 0.005$ を用い、サイクル 2000 回まで非定常計算を進め、その後水面を可動させグリッドを組み直した。 $T = 15.0$ における流速分布図を以下に示す。

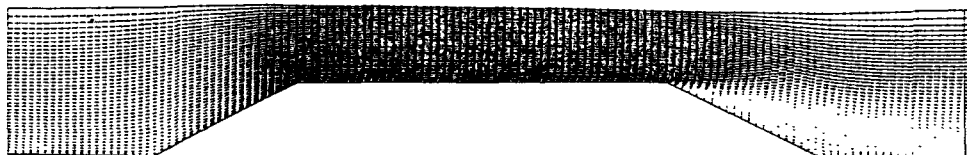


Fig.2 Velocity Profile at $T = 15.0$.

6. おわりに

数値計算および実験の結果から、本手法が乱流場での水理現象・局所流の計算には有効ではないと思われる。