

SOWMAC法を用いた拡散シミュレーション

九州大学 正 員 朝位 孝二 九州大学 正 員 小松 利光
佐賀大学 正 員 大串浩一郎 九州大学 学生員 吉村耕市郎

1. まえがき

環境汚染の問題を考える際にコンピュータを用いた拡散シミュレーションを行うことが多い。現象を規定する数学モデルは移流拡散方程式あるいは移流分散方程式である。これらの方程式を数値的に解いた場合、移流項の計算に大きな数値誤差を伴うことが知られている。精度の良いシミュレーションを行うためには移流項の計算を高精度で行えるスキームを採用することが必要である。小松ら¹⁾が開発した6-Point Schemeは従来の計算スキームと較べて画期的な計算精度を持つ計算法である。しかしながらスキーム中に取り込む格子点の数は6点と比較的多いために、境界付近でのスキームの取扱いにやや煩雑さがあつた。筆者ら²⁾は6-Point Schemeの欠点を克服したSOWMAC法を開発した。本研究ではSOWMAC法を多次元問題に適用し、その妥当性を検討した。

2. 多次元問題への適用

SOWMAC法の多次元問題への拡張を考える。ここでは2次元問題について考察を行う。2次元の移流拡散方程式は次式のとうりである。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (1)$$

Split Operator Approachを用いれば、(1)式は純粋移流方程式と拡散方程式に分離することができる。同一タイムステップ内で、SOWMAC法を用いて純粋移流方程式を解き、その解を用いて拡散方程式を解けば良い。SOWMAC法はもともと1次元純粋移流方程式に対して定式化されたものであるので、2次元純粋移流方程式を解くためには若干の工夫が必要である。

拡散物質Cは短い1タイムステップ内でx方向に移流された後、y方向に移流されると仮定すれば、2次元純粋移流方程式は次式のように、x方向の1次元純粋移流方程式とy方向の1次元純粋移流方程式に分離できる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2) \qquad \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

同一タイムステップ内で、(2)式を解きその解を用いて(3)式を解けば、x-y平面上での拡散物質Cの移流輸送が計算できたことになる。

3次元問題ではz方向の式を付け加え同様の方法で解けば良い。

3. モデル計算

2次元純粋移流のモデル計算として、ふたつのGauss型濃度分布の重ね合わせで表される初期濃度分布が2次元無限平面上で一定流速 $u = v = 0.5 \text{ m/sec}$ で下流に輸送される場合を考える。ふたつのGauss型分布のピークの初期位置の座標は $(x, y) = (1400 \text{ m}, 1400 \text{ m})$, $(2400 \text{ m}, 2400 \text{ m})$ でそれぞれのピーク値は10と6.5、また標準偏差はそれぞれ264mである。計算格子は $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ m}$, $\Delta t = 100 \text{ sec}$ で9600秒間移流輸送させた。3次元純粋移流モデル計算として2次元モデル計算と同様に、ピークの初期の位置座標が $(x, y, z) = (1400 \text{ m}, 1400 \text{ m}, 1400 \text{ m})$, $(2400 \text{ m}, 2400 \text{ m}, 1400 \text{ m})$ でピーク値がそれぞれ10と6.5で標準偏差264mのGauss型濃度分布の重

ね合わせの分布を考える。 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 200\text{m}$ 、 $\Delta t = 100\text{sec}$ 、 $u = v = w = 0.5\text{m/sec}$ で9600秒間移流させた。

図-1に2次元純粋移流の計算結果を直線 $x = y$ 上に沿った濃度分布で示す。比較のために6-Point Scheme、風上差分、Leapfrog Schemeによる計算結果も併せて示している。3次元純粋移流の計算結果を $x = y$ 、 $z = 6200\text{m}$ の直線上に沿った濃度分布で図-2に示す。図-1,2から風上差分、Leapfrog Schemeは原型をとどめないほどの数値誤差を生じているが、SOWMAC法は6-Point Schemeとほぼ同程度の精度を有していることがわかる。

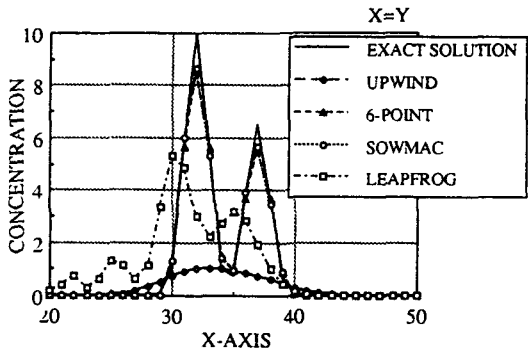


図-1 2次元純粋移流計算結果

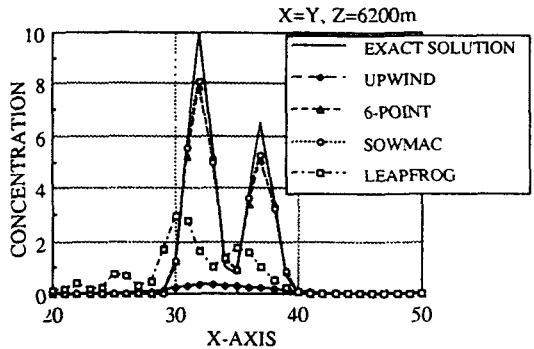


図-2 3次元純粋移流計算結果

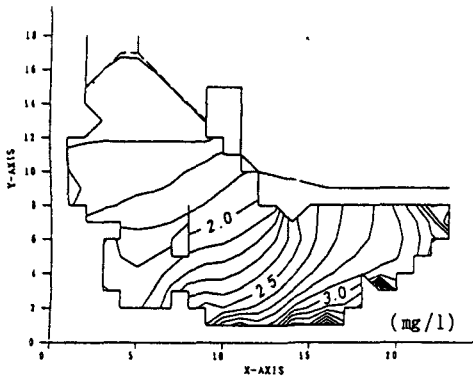


図-3 博多湾のCOD分布図(6-Point Scheme)

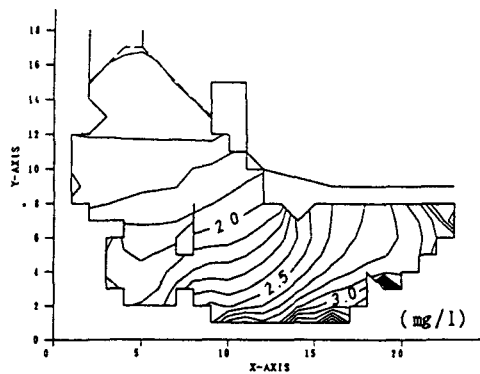


図-4 博多湾のCOD分布図(SOWMAC法)

図-3は博多湾の現況のCOD濃度分布を再現したものである。移流項の計算には6-Point Schemeが用いられている³⁾。SOWMAC法を用いてシミュレートした博多湾の現況のCOD濃度分布を図-4に示す。これらの図から実際計算においても、SOWMAC法は6-Point Schemeとほぼ同程度の精度で計算が実行できることがわかった。

4. おわりに

SOWMAC法は使用する点がわずかに3点のため境界付近の取扱が簡便で、なおかつ6-Point Schemeと同程度の精度を有する有力な計算スキームであることがわかった。

5. 参考文献

- 1) T.Komatsu, F.M.Holly, N.Nakashiki and K.Ohgushi: Numerical Calculation of Pollutant Transport in One and Two Dimensions, J.H.H.E., Vol.3, No.2, pp.15-30
- 2) 小松利光、大串浩一郎、朝位孝二: 拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発、土木学会論文集(投稿中)
- 3) T.Komatsu, S.Yano, Y.Matsunaga, K.Ohgushi: Simulations of tidal current and pollutant diffusion in a bay, Proc. of the Int. Sympo. on Environmental Hydraulics, pp.847-852, 1991