

三角形水路の密度流に生ずる2次流の解析

長崎大学工学部 学○村中 隆司
長崎大学工学部 学 濱 丈治
長崎大学工学部 正 古本 勝弘

1. まえがき

河川感潮域の流れには、塩分による流れ方向密度勾配が存在し、横断方向に一様でない流速はこの方向に密度勾配を生むため、縦・横断方向に2次流(重力循環流)が形成される。この2次流の生起を理論的に説明するため、偏平な三角形断面水路における流下方向密度勾配をもつ流れ(流速・密度の断面内分布)の解析を行った。本報は、前の解析¹⁾の不充分な境界条件を改善したものである。

2. 流れのモデルと基礎式

解析対象の流れは、図-1に示すような中央水深H、幅2B(B/H= $\beta \gg 1$)の一様三角形断面水路の、x-方向に一定の密度勾配をもつ等流とする。断面平均流速Uとともに移動する座標 $x_1 = x - Ut$ に対し密度は定常に保たれるものとして、次のようにおく。

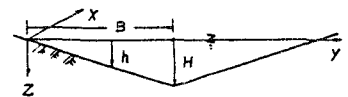


図-1

$$\rho = \rho_0 + \langle \rho \rangle (1 + \nu (x_1/H + \theta(y, z))) \quad (1)$$

静水圧分布を仮定し、基礎式は、x-y方向の運動方程式、密度保存式と連続の式で、それぞれ無次元化式は、

$$\frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} = 1 - 2\sigma \tilde{h} \zeta + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta}) \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho_0 U_*^2} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}) \quad (3) \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta} = 0 \quad (5)$$

$$(\tilde{u} - \tilde{U}) + \frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \theta}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon} \tilde{h}^3 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}) \quad (4) \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{\langle \rho \rangle \nu g H}{\rho_0 U_*^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \rho \rangle \nu g h}{\rho_0 U_*^2} \quad (6)$$

ここに、 σ (⑥式) は密度効果を支配するパラメーターであり、 $\tilde{u}=u/U$ 、 $\tilde{v}=v/U$ 、 $\tilde{w}=w/U$ 、 $\eta=y/B$ 、 $\zeta=z/h$ 、 $\tilde{h}=h/H$ 、 $\tilde{\epsilon}=\epsilon/hu$ 、 $\tilde{e}=e/hu$ 、 $U_*=\sqrt{ghI}$ 、 $u_*=\sqrt{ghI}$ である。yにおける渦動粘性係数 ϵ と渦拡散係数 e は深さ方向に一定とし、添字でその方向のものを表す。

3. 摂動法による解析

密度流効果が小さい流れを対象とし、 σ をパラメータに摂動展開し、未知量を次のようにおく。

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \sigma \tilde{u}_1 + \dots, \quad \tilde{v} = 0 + \sigma \tilde{v}_1 + \dots, \quad \tilde{w} = 0 + \sigma \tilde{w}_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \sigma \theta_1 + \dots, \quad p = p_0 + \sigma p_1 + \dots \quad (7)$$

また、 ϵ 、 e は、鉛直方向成分のみが密度効果を受けると仮定して、次のように表す。

$$\tilde{\epsilon}_x = \tilde{\epsilon}_{x0} + \sigma \tilde{\epsilon}_{x1} + \dots, \quad \tilde{e}_x = \tilde{e}_{x0} + \sigma \tilde{e}_{x1} + \dots \quad (8)$$

境界条件は、

$$\text{水面: } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} = 0, \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{底面: } \tilde{u} = \chi_b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{v} = \chi_b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad (9)$$

⑦、⑧を②～⑤に代入し、 σ の0, 1次の方程式を書くと、左右対象の三角形断面では、 $\tilde{h}=\eta$ とあるので、

$$0 \text{ 次: } \frac{\tilde{\epsilon}_{x0}}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^3 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta}) + \frac{\tilde{\epsilon}_{z0}}{\eta} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \zeta} = -1 \quad (10) \quad \frac{\tilde{\epsilon}_{x0}}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^3 \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta}) + \frac{\tilde{\epsilon}_{z0}}{\eta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} = \tilde{u}_0 - \tilde{U}_0 \quad (11)$$

$$1 \text{ 次: } \frac{\tilde{v}_1}{\beta} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}_1}{h} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \zeta} = -2\chi_b \zeta + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \eta^3 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} + \tilde{\epsilon}_{z1} \eta^3 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta}) + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} + \tilde{\epsilon}_{z1} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \zeta}) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p_1}{\rho_0 U_*^2} \right) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \eta^3 \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta}) + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \eta}) \quad (13) \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta} + \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \zeta} = 0 \quad (14)$$

$$(\tilde{u}_1 - \tilde{U}_1) + \frac{\tilde{v}_1}{\beta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}_1}{h} \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \eta^3 \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \tilde{\epsilon}_{z1} \eta^3 \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta}) + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_{x1} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \tilde{\epsilon}_{z1} \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta}) \quad (15)$$

⑩を解くには、右边を0とする同次方程式の解と左辺第一項を省略した非同次式の解を加え、

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{z0}} \left[\eta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \chi_b - \frac{\beta^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\chi_b - \frac{1}{2} \right) \frac{\beta^2}{\lambda} \cos k\eta \right] \quad (16) \quad \text{ここに、} \lambda = 1/4 \left(-1 + \sqrt{1 + 16\beta^2 k^2 / (\tilde{\epsilon}_{x0} / \tilde{\epsilon}_{z0})} \right)$$

kは底面の境界条件から出る式 $k \tan k = -1/\chi_b$ を満足する係数で、簡単のため主項のみをとる。

⑪から θ_0 を求めるには、同次方程式の解、鉛直平均流速 $(\tilde{u}_0 - \tilde{U}_0)$ とy方向拡散で作られる鉛直平均密度

および η における流速の鉛直偏差 ($\bar{u}_0 - \bar{u}_\eta$) と z 方向拡散で作られる偏差密度の和として、

$$\theta_0 = C_0 \gamma^{\frac{1}{2}} \cos \pi \gamma + \left[\frac{\beta^2}{\bar{e}_{\gamma_0}} \int_0^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (\bar{u}_0 - \bar{u}_\eta) d\eta d\gamma + C_1 \right] + \left[\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\bar{e}_{z_0}} \int_0^{\frac{1}{2}} (\bar{u}_0 - \bar{u}_\eta) d\eta d\gamma + C_2(\eta) \right] \quad (17)$$

ここに、 $\kappa = 1/4(-1 + \sqrt{1 + 16\pi^2 \beta^2 / (\bar{e}_{\gamma_0} \bar{e}_{z_0})})$, $\bar{u}_0 = \int_0^1 \bar{u} d\zeta$, $\bar{u}_\eta = \int_0^1 \eta \bar{u} d\eta / \int_0^1 \eta d\eta$
 また、 C_0 は、 $\eta=1$ で $\partial \theta / \partial \eta = 0$, C_1 は $\int_0^1 \theta_0 dA = 0$, $C_2(\eta)$ は $\int_0^1$ (右辺第三項) $d\zeta = 0$ の各条件から決められる係数である。ところで、密度流効果から横断方向に水面勾配が生ずるので、水面変化も σ で展開し、 $\xi = 0 + \sigma \xi_1 + \dots$ とおくと、①と静水圧分布の仮定から、 $p_1 / \rho_0 U_*^2 = -\xi_1 / (1 + 2 \int_0^1 \theta_0 dz)$ となり、未知量 ξ_1 が現れるが、これは、 $\int_0^1 \bar{v} d\zeta = 0$ の条件から決められるので、 $\bar{u}_0$ と同様の方法で⑬を解いて $\bar{v}_1$ が求まる。この $\bar{v}_1$ を連続式⑭に用いて $\bar{w}_1$ を得る。 $\bar{v}_1, \bar{w}_1$ を⑫に用いて $\bar{u}_1$ が求められると、⑮から θ_1 を得ることができる。これら 1 次の未知量は全て非常に長い式となるのでここでは示さない。

4. 計算結果

以下に示す計算結果では、渦動粘性係数と渦拡散係数は等しいとし、鉛直方向の係数は、対数分布則から求まる値 $\bar{e}_{z_0} = \bar{e}_{z_0} = 0.07$ 、横断方向の係数は Fischer らがまとめた値 $\bar{e}_{\gamma_0} = \bar{e}_{\gamma_0} = 0.4$ を用い、 $\chi_0 = -2/3$ とおいた。また、成層流における渦動粘性の変化は、2 次流の実験による値 $\bar{e}_{z_1} = \bar{e}_{z_1} = -2.5 \epsilon_0$ を用いた。

図-2, 3 に $\bar{v}_1$, $\bar{w}_1$ の断面内分布を示す。これによると傾斜に沿って流心に向かう底層の流れ、水面近くを岸に向かう流れの循環流となることが分かる。図-4, 5 には流速・密度の鉛直平均からの分布を示す。これによると両者とも密度効果により鉛直勾配を増加させることが分かる。図-6, 7 に流速と密度の鉛直平均の横断分布を示す。いずれも 1 次流による分布を、2 次流が減少させる側にあり、断面内の流れを密度効果が一様化させている。従って、密度流効果は鉛直方向には流れを歪ませ、横断方向には一様化させる。

(参考文献) 1) 岩田他：平成元年度西部支部概要集

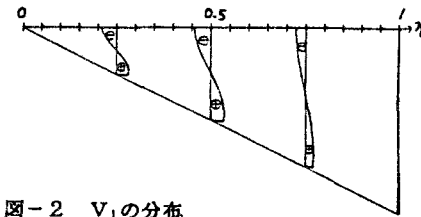


図-2 V_1 の分布

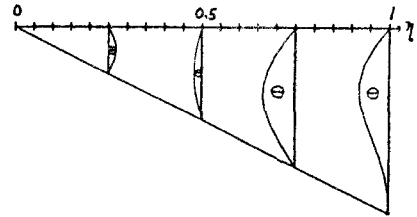


図-3 W_1 の分布

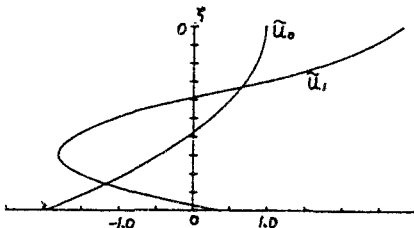


図-4 鉛直平均からの偏差流速

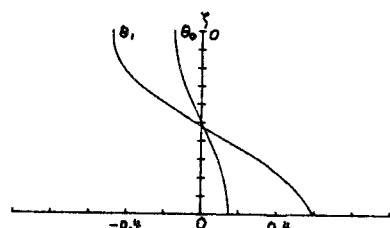


図-5 鉛直平均からの偏差密度

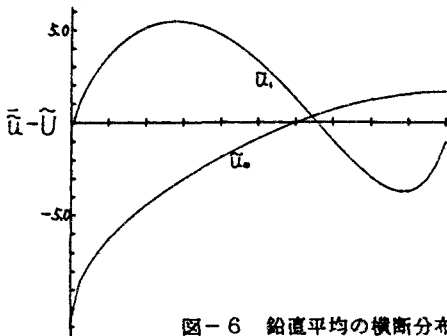


図-6 鉛直平均の横断分布

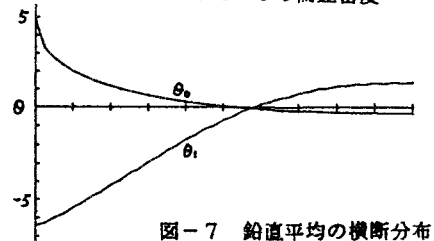


図-7 鉛直平均の横断分布