

ポテンシャル接続法の選点解法による三次元波動境界値問題解析法

九州大学工学部 学生員○小野雅人 正 員 吉田明徳
同 上 正 員 村上啓介

1. まえがき

著者らは二次元波動境界値問題を対象に、ポテンシャル接続法(選点解法)の妥当性と有用性を示した¹⁾。本文は、ポテンシャル接続法(選点解法)を三次元波動境界値問題に拡張する方法の概略と選点解法の三次元問題への適用可能性を示すものである。

2. 理論解析法の概略

図-1に示すように、一定水深 h の海域に断面形状が y 軸に関して対称な単一の半没水鉛直柱体(吃水 $qh, 0 < q < 1$)があり、これに対し振幅 ζ_0 、角周波数 σ の微小振幅波が y 軸の正方向から入射する場合を考える。

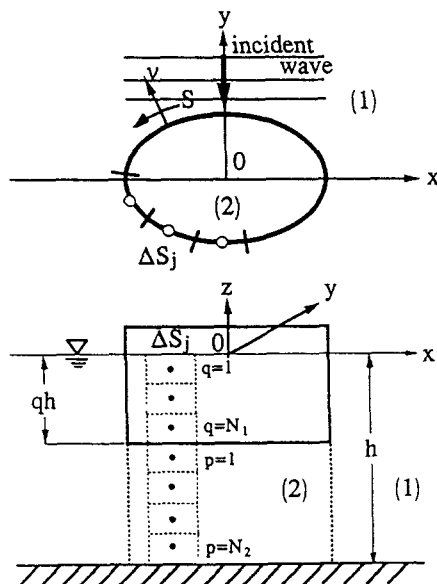


図-1 領域分割図と計算点

流体運動は非圧縮、非粘性完全流体の微小振幅波運動と仮定する。流体域を自由表面を有する領域(1)と柱体底面下の領域(2)に分割すると、各領域の速度ポテンシャルはそれぞれ次式で表せる。

$$\Phi_1(x, y, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \left\{ \phi_I(x, y)Z_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x, y)Z_n(z) \right\} e^{-i\sigma t} \quad (1)$$

$$\Phi_2(x, y, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(x, y)Y_s(z) \right\} e^{-i\sigma t} \quad (2)$$

ここで、 ϕ_I は入射波のポテンシャル関数 $\phi_I = ie^{-iky}$ 、 $Z_n(z) = \cos k_n(z+h)/\cos k_n h$ で、 k_n は $\sigma^2 h/g = -k_n h \tan k_n h (k_0 = ik, k$ は入射波の波数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 g は重力加速度)の根である。また、 $Y_s(z) = \cos \bar{s}(z+qh)$ で、 $\bar{s} = s\pi/(1-q)h$ である。 ϕ_n, φ_s は Helmholtz の方程式を満足すべき無次元関数(以後ポテンシャル関数と呼ぶ)で、任意の点 (x, y) における値は、グリーンの定理によりポテンシャル関数と法線微分に関する境界積分によって与えられる²⁾。数値計算上、ポテンシャル関数とその法線微分の値は (x, y) 平面上の境界要素 ΔS_j に関して与えられ、これは離散化したグリーンの式と境界面上における次の連続条件より得られる $\phi_n(j), \varphi_s(j)$ に関する連立一次方程式を解いて決められる。

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (-h \leq z \leq -qh) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & (-qh \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu} & (-h \leq z \leq -qh) \end{cases} \quad (4)$$

この際、従来の解法では $Z_n(z)$ が $(-h \leq z \leq 0)$ で、また $Y_s(z)$ が $(-h \leq z \leq -qh)$ で直交関数系をなすことを利用して、ポテンシャル関数の関係を規定する一次関係式を得るのに対し、選点解法では境界面上に異なる z の値の計算点(選点)を取り、その計算点上で(3),(4)式が成り立つことを規定することによって、ポテンシャル関数に関する一次関係式を得る。すなわち、図-1に示すように境界面を鉛直方向に等間隔に矩形の面要素(幅 ΔS_j)に分割し、各面要素の中点の z 座標を、柱体表面の要素については $z_q (q = 1, 2, \dots, N_1)$ 、領域(1)と領域(2)の境界面上の要素については $z_p (p = 1, 2, \dots, N_2)$ で表すと、(3),(4)式よりポテンシャル関数に関する次の一次関係式が得られる。

$$\sum_{n=0}^{n^*} Z_n(z_p) \phi_n(j) - \sum_{s=0}^{s^*} Y_s(z_p) \varphi_s(j) = -Z_0(z_p) \phi_I(j) \quad (5)$$

$$(p = 1, 2, \dots, N_2) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\sum_{n=0}^{n^*} Z_n(z_q) \bar{\phi}_n(j) = -Z_0(z_q) \bar{\phi}_I(j) \quad (6)$$

$$(q = 1, 2, \dots, N_1) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

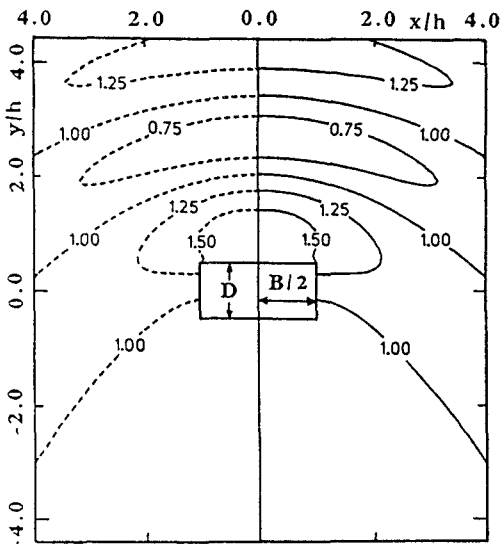
$$\sum_{n=0}^{n^*} Z_n(z_p) \bar{\phi}_n(j) - \sum_{s=0}^{s^*} Y_s(z_p) \bar{\varphi}_s(j) = -Z_0(z_p) \bar{\phi}_I(j) \quad (7)$$

$$(p = 1, 2, \dots, N_2) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

ただし、 N は境界面の (x, y) 平面上の分割個数、 $\bar{\phi}_n(j)$, $\bar{\varphi}_s(j)$ は $\phi_n(j)$, $\varphi_s(j)$ の法線微分を意味する。
(5)~(7)式および離散化したグリーンの式は、ポテンシャル関数とその法線微分値に関する $N\{(n^* + 1) + (s^* + 1) + N_1 + 2N_2\}$ 個の式を与える。一方、未知数の個数は $2N\{(n^* + 1) + (s^* + 1)\}$ 個であるから、打ち切り項数 n^* , s^* を $n^* + 1 = N_1 + N_2$, $s^* + 1 = N_2$ に取り、これらを連立して解くことによって境界要素 ΔS_j についてのポテンシャル関数とその法線微分値を決めることができる。

3. 選点解法の解の精度

従来の解法と選点解法による解の比較を行った。その結果を矩形柱体 (幅 $B = 2h$, 高さ $D = h$, $q = 0.5$) について図-2~図-4 に示している。図-2 は柱体近傍の波高分布 ($kh = 1.0$) を示したもので、実線が従来の解法、破線が選点解法による解である。図-3 は柱体に作用する水平波力 F_y および鉛直波力 F_z について両解法の解を比較したものである。ただし、鉛直壁に作用する重複波の波力 $\rho g \zeta_0 B h [\tanh kh / kh]$ で無次元化している。図中実線で示したのが従来の解法、○が選点解法である。図-2, 3 よりそれぞれの解法の解はきわめて良い一致を示しており、両解法は実用上はほぼ同じ解を与えることがわかる。図-4 はポテンシャルの法線微分について境界面における連続条件の二乗誤差 ε_p^2 を求めた結果である。ただし、入射波の法線微分値の二乗を境界面に沿って積分した値で基準化している。この図より kh によらず選点解法の方が精度の良い解が得られていることがわかる。なお、ここに示してはいないが、ポテンシャルの二乗誤差 ε_p^2 は、両解法ともほぼ 0 に近く連続条件は十分満足されている。



選点解法 従来の解法
図-2 柱体近傍の波高分布

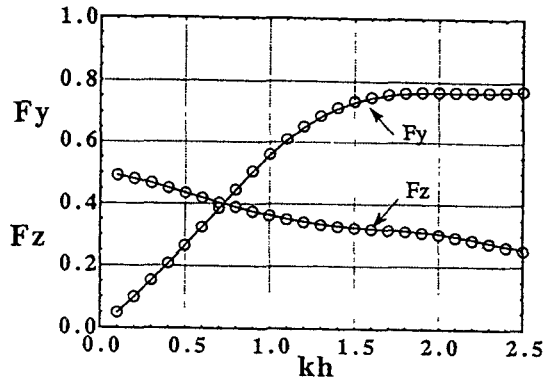


図-3 選点解法と従来解法の比較 (波力)

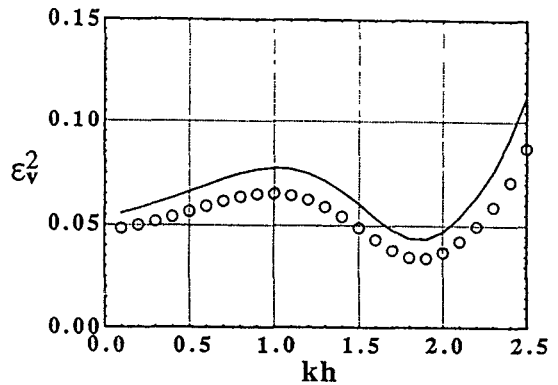


図-4 選点解法と従来解法の比較 (連続条件の二乗誤差)

4. あとがき

三次元波動境界値問題にポテンシャル接続法の選点解法を適用し、その妥当性を検討した結果、直交関数についての積分演算を必要とする従来の解法に較べて精度の良い解が得られることがわかった。選点解法によれば、理論式と計算プログラムはきわめて簡単明瞭となるから、従来の解法では解析が煩雑となる動揺浮体の解析や、複数個の構造物と波との干渉問題も比較的容易に解析ができることになる。また、非線形問題に対する適用も可能となり、これについては今後検討を続けるつもりである。

参考文献

- 1) 吉田明徳・小島治幸・鶴本良博: 波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法, 土木学会論文集, 第 417 号, pp.265-274, 1990
- 2) 吉田明徳・村上啓介: 半没水柱体列による波の散乱と波力, 九大工学集報, 第 60 巻, 第 5 号, pp.587-596, 1987