

偏平ケーブルに現われる分数調波共振

長崎大学工学部 学生員 ○入江省造

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 町田健一郎

1. まえがき ケーブルの非線形応答は、付随型と分岐型に分類され、今日、付随型の振動特性については、ほぼ解明されたと言えよう。また、分岐型の場合、面内加振による応答には、分数調波共振、逆対称分岐応答、面外非線形分岐応答があり、こちらもそれぞれの特性について、既に解明がなされている。ところでサグをもつケーブルの特徴は、振動方程式中に2次の非線形項が含まれることである。したがって、分岐応答の1つである分数調波共振には、対称振動の場合に1/3分数調波共振だけでなく1/2分数調波共振が含まれる。偏平ケーブル(サグ比1/8以下)においては、この1/2分数調波共振の振動特性が、十分に解明されたとは言い難い。また、1/2分数調波共振の近傍には、カオスの振動が生ずることが指摘されている¹⁾。この場合には、解析的な方法は適用できない。そこで、本研究では、まず最初に偏平ケーブルの運動方程式を1自由度の振動系にモデル化の後、1/2分数調波共振を調和バランス法を用いて求め、サグ比と縦波-横波伝播速度比をパラメーターに、共振の応答を明らかにする。ついで、微分方程式を直接数値積分することによって時間応答波形を求め、解析解の存在範囲を明らかにする。

2. 運動方程式 図-1に示すような偏平ケーブルが周期的等分布荷重を受ける場合の運動方程式は、Irvineの成書から次式のように与えられる²⁾。

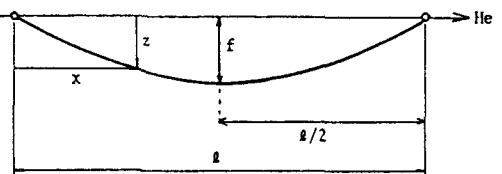


図-1 ケーブルの一般図

$$L(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} h - (H_e + h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

$$h = \frac{EA}{L_e} \left(\frac{8f}{l^2} \int_0^l w dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right)$$

ここに、 w ：面内鉛直たわみ、 t ：時間、 m ：ケーブルの単位長さあたりの質量、 f ：ケーブルサグ、 l ：ケーブルスパン長、 h ：活荷重水平張力、 E ：ヤング率、 A ：断面積、 $L_e = l(1 + 8f^2/l^2)$ ：ケーブル長、 H_e ：初期水平張力、 p_0 ：外力の振幅、 Ω ：外力の円振動数

3. 解法 式(1)の解を1自由度系モデルで、次の変数分離形に仮定する。

$$w = l T(t) W(x) \quad (2)$$

ここに、 $T(t)$ ：未知の時間関数、 $W(x)$ ：境界条件を満足する座標関数
上式の座標関数 W として、自由振動の対称モードを用いる。そこで、式(1)にGalerkin法を適用すると、次式が得られる。

$$\ddot{T} + \omega_1^2 T + C_2 \dot{T}^2 + C_3 T^3 = C_0 \bar{p}_0 \cos \bar{\omega} \tau \quad (3)$$

ここに、 $\omega_1 = n_1 / \pi n_0$ ：1次の無次元固有円振動数、 $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m l^2}$ ：弦の1次の固有円振動数、 n_1 ：ケーブルの1次の固有円振動数、 $C_2 = 12 \gamma BCD$ 、 $C_3 = B^2 D / 2$ 、 $C_0 = C / A \pi^2$ 、 $D = k^2 / (1 + 8 \gamma^2) A \pi^2$ 、 $A = \int_0^l W^2 d\xi$ 、 $B = \int_0^l W'^2 d\xi$ 、 $C = \int_0^l W d\xi$ 、 $\xi = x/l$ 、 $\gamma = f/l$ ：サグ比、 $k = \sqrt{EA/H_e}$ ：縦波-横波伝播速度比、 $\bar{p}_0 = p_0 l / H_e$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$ 、 $\tau = n_0 t$

1/2分数調波共振を求めるため、まず式(3)の解をFourier級数解析法にもとづき、次式のように仮定する。

$$T = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

ここに、 c_0 、 c_1 ：付随調波成分、 $c_{1/2}$ 、 $s_{1/2}$ ：分岐調波成分
式(4)を式(3)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を求める連立非線形代数方程式を得る。
これに Newton-Raphson法を用い、適当な初期値のもとに解けば、必要な解が得られる。

また、式(3)を2元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill法を適用して直接数値積分すれば、時間応答波形が得られる。

4. 数値結果 図-2,3,4は、伝播速度比 $k=30$ の偏平ケーブルで、サグ比 $\gamma=0.01, 0.02, 0.05$ の3ケースについて横軸に無次元加振振動数、縦軸に振幅成分を取り、付随応答と分数調波応答を示したものである。荷重強度は静的応答が $1/1000$ となるように設定してある。付随応答 c_1 は、あらゆる振動数領域で生じ、実線が外力と同位相の応答、破線が逆位相の応答を示し、それぞれのサグ比について振動数 $\bar{\omega}=1.2, 1.7, 2.2$ 付近で共振状態となっている。1/2分数調波共振の応答は、固有振動数の2倍の振動数領域でのみ生じる。サグ比 $\gamma=0.01, 0.02$ の場合、ケーブルは2次の非線形項が支配的な軟化バネ特性を示し、 $\gamma=0.05$ の場合、3次の非線形項が支配的な硬化バネ特性を示す。また、1/2分数調波応答によって囲まれる応答曲線上では、任意の位相を持つ応答が生じる。この幅は2次の非線形項の大きさによって左右され、幅が広いほど、1/2分数調波共振は生じやすい。

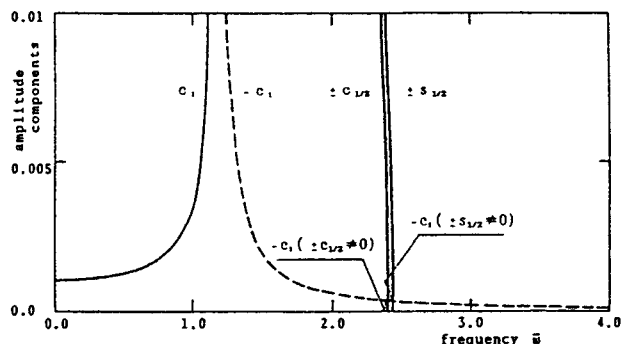


図-2 1/2分数調波共振($k=30, \gamma=0.01$)

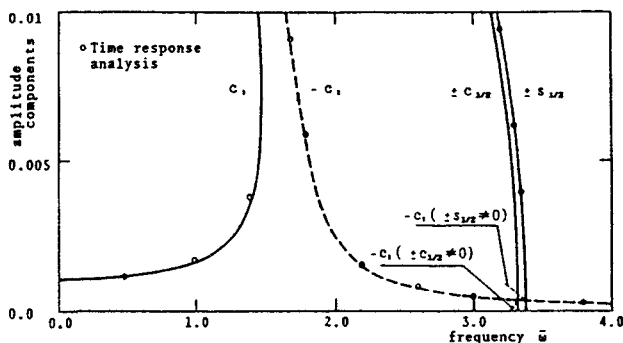


図-3 1/2分数調波共振($k=30, \gamma=0.02$)

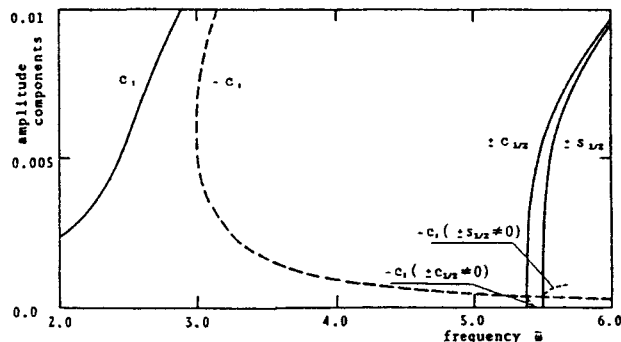


図-4 1/2分数調波共振($k=30, \gamma=0.05$)

図-3には、Runge-Kutta-Gill法より得られた時間応答が定常となつてからの応答振幅をプロットした。これより、両者は、ほぼ一致していることが確かめられる。

5. まとめ 今回の研究では、偏平ケーブルに現われる1/2分数調波共振特性を明らかにし、数値シミュレーションによる解との比較を行なった。

Regaら¹⁾によって、1/2分数調波共振では、周辺に不規則波の存在が報告されている。したがって、今後、このシミュレーションによって、1/2分数調波共振がカオスに移動する挙動を明らかにしたい。

参考文献 1) Rega, G. Benedettini, F.: Journal of Sound Vibration, Vol.132, No.3, 1989, 2) 町田・高橋・夏秋: 長崎大学工学部研究報告, 第22巻, 第38号, 1992