

変動軸力を受ける片持ちばりの安定を失った後の動的応答

長崎大学工学部 学生員○江島裕章

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 宇宙構造物などを対象とする自由端を持つ構造部材に対して、動的安定の解明が望まれている。従来の研究¹⁾により自由端を持つ片持ちばりでは、荷重の作用方向の影響を考える必要があり、安定を失った後の動的応答を求めるためには、はりの非線形曲率の影響を考慮する必要があることがわかっている。しかし、このような研究は極めて少ない。そこで本研究は、変動軸力を受ける片持ちばりに対して負荷条件の力学的な違いと動的応答を、有限変形理論を用いて明らかにするものである。はりの非線形運動方程式を Galerkin 法を用いて常微分方程式に変換し、これに、Runge-Kutta-Gill 法を適用して時間応答解析を行う手法を採用する。数値解析においては、静的軸力、減衰力および負荷条件の影響を評価する。

2. 基礎式および解法 図-1に示す片持ちばりのたわみを y とする。このはりに静的軸力 P_0 と変動軸力 $P_t \cos \Omega t$ の和からなる $P_0 + P_t \cos \Omega t$ が作用する場合の曲率による非線形項を考慮したはりの運動方程式は、次式で与えられる。

$$L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \left(2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 E : ヤング率、 I : 断面2次モーメント、

w : 単位体積重量、 g : 重力の加速度、 A : 断面積

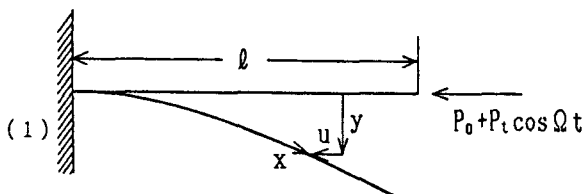


図-1 一般図および座標系

片持ちばりに、(a)保存力が作用する場合と(b)従動力が作用する場合の、2つの負荷条件(図-2)を考える。

式(1)に減衰力が作用する場合を考え、その一般解を次式のように仮定する。

$$y = l \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t) \quad (2)$$

ここに、 l : はりの長さ、 T_i : 未知の時間関数、

X_i : 境界条件を満たす座標関数

座標関数には、保存力の場合では座屈波形により近似した固有振動形を用い、従動力の場合ははりの曲げ振動の固有振動形を用いる。

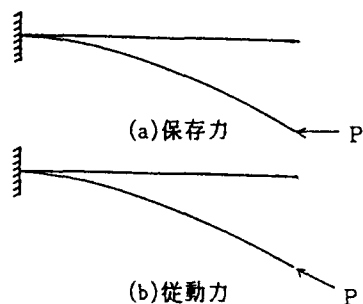


図-2 負荷条件

式(1)に Galerkin 法を適用すると、次式のような常微分方程式にまとめられる。

$$\ddot{T}_i + 2h_i \alpha_i \dot{T}_i + \alpha_i^2 T_i + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{ji} T_j + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{mnji} T_j T_m T_n = 0 \quad (3)$$

ここに、 h_i : 減衰定数、 $\xi = x/l$ 、 $\bar{P}_0 = P_0/P_{cr}$ 、 $\bar{P}_t = P_t/P_{cr}$ 、 $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$ 、 $\lambda_i^* = l^4 wA \omega_i^2 / EI g$ 、

$$\tau = \omega_i t, \quad \delta_i = \int_0^1 X_i^2 d\xi, \quad \chi_{ji} = \int_0^1 \beta_{ji} / \lambda_i^* \delta_i, \quad \zeta_{mnji} = \int_0^1 (2X_m' X_n' X_j'' + X_m'' X_n'' X_j) X_i d\xi,$$

$$\Gamma_{mnji} = \zeta_{mnji} / \lambda_i^* \delta_i, \quad \alpha_i^2 = (\lambda_i / \lambda_i^*)^2$$

$$(a) \beta_{ji} = -\int_0^1 X_i' X_j' d\xi \quad (b) \beta_{ji} = \int_0^1 X_i X_j d\xi$$

式(3)は連立の非線形常微分方程式であるから、この一般解を求めることは不可能である。したがって、本研究では、Runge-Kutta-Gill 法による時間応答解析を行う。なお、式(3)の非線形項を無視すれば、係数励振振動の微分方程式が得られる。これを固有値問題に変換する手法を用いれば、不安定領域を求めることができる。本題の時間応答解析は、不安定領域内の無次元パラメータ ($\bar{P}_t, \bar{\omega}$) の組合せに対して行う。

3. 数値結果 (1) 不安定領域

図-3, 4は片持ちばりに保存力と従動力が作用する場合の不安定領域である。図において、縦軸は変動軸力を座屈荷重で無次元化した無次元励振振幅 $\bar{P}_t = P_t/P_{cr}$ であり、横軸は無次元励振振動数 $\bar{\omega} = \Omega/\omega_1$ である。振動数領域は1次の固有振動数の20倍まで求めた。また、座屈荷重 $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$ が保存力の場合には $\varepsilon = \pi/2$ 、従動力の場合には $\varepsilon = 4.4777$ となるため、従動力の方に保存力の約8倍の大きさの軸力が作用している。図-3の保存力の場合では、単純共振 $2\omega_1$ および和形の結合共振の主不安定領域 $\omega_1 + \omega_2$ が得られている。そして、図-4の従動力の場合には、これらの不安定領域に加えて、単純共振の副不安定領域 ω_1 および差形の結合共振の主・副不安定領域 $(\omega_i - \omega_j)/k$ ($k=1, 2$) が得られる。励振振幅が同じ場合、従動力の方が保存力よりも不安定領域は広がっている。また、静的軸力が作用する場合、はりの固有振動数は変化し、発生振動数が移動して不安定領域の幅は広がる。減衰力が作用する場合には、一部の結合共振で不安定領域が広がる脱安定化効果が見られる。

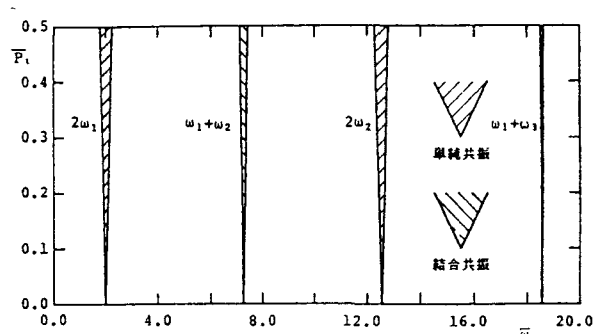


図-3 片持ちばりの不安定領域(保存力)

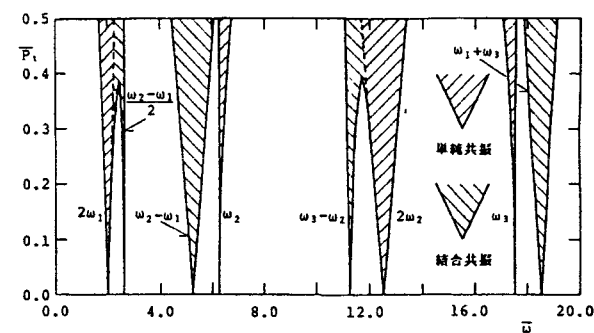


図-4 片持ちばりの不安定領域(従動力)

(2) 最大応答 保存力と従動力の2つの荷重に対して、不安定領域の中心振動数に対する自由端の最大応答(振幅/長さ)と無次元励振振幅 $\bar{P}_t$ の関係をそれぞれ図-5, 6に示す。負荷条件に関係なく低い振動数の順に、最大応答が大きくなっている。また、最大応答は座屈荷重の6%程度の荷重でも、はりの長さの4~6割にもなる。減衰力が作用する場合の最大応答と励振振幅の関係は図-7のようになる。励振振幅が小さいときにのみ減衰力の影響が著しく、励振振幅が大きくなると最大応答の発散を押えることはできない。

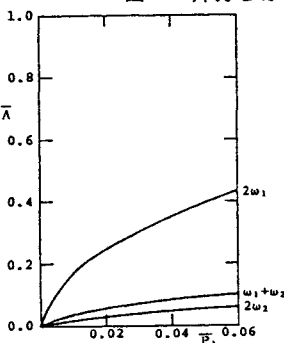


図-5 最大応答(保存力)

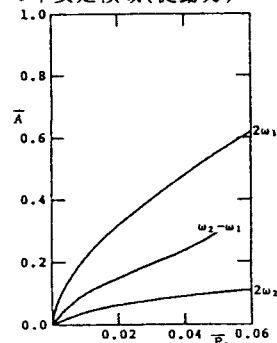


図-6 最大応答(従動力)

4. まとめ (1) 従動力が作用する場合の不安定領域には、差形の結合共振が存在し、保存力の場合と比較して幅が広がっている。減衰力が作用する場合、一部の結合共振で脱安定化効果が見られるため、不安定領域を決定するには減衰力を考慮する必要がある。

(2) 安定を失った後の動的応答は、負荷条件によらず非線形項を考慮しても応答の発散を押えることができない。また、静的軸力が存在する場合には、最大応答は増大する。減衰力が存在する場合には、励振振幅が小さいときに応答が著しく小さくなり、励振振幅が大きくなると応答はあまり変化しない。

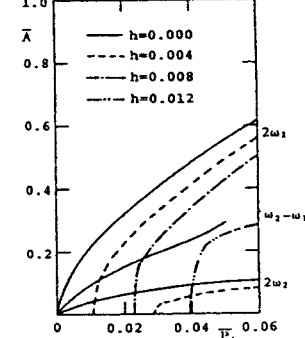


図-7 減衰力の最大応答に及ぼす影響(従動力)

参考文献 1) 高橋・手塚・其田: 変動軸力を受けるはり部材の安定を失った後の動的応答, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 65-72, 1991. 3.