

複合材料からなる長方形板の振動、座屈及び動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○横山貴浩
 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄
 長崎大学工学部 学生員 江島裕章

1. まえがき 複合材料は、一般に異なる材料を組み合わせたものであり、力学的には異方性を示す。最近この異方性を積極的に利用することにより、目的に応じた材料を得ることが試みられている¹⁾。そのためには、従来の等方性材料と違った力学特性をもつ複合材料の座屈荷重や固有振動数を十分に把握しておくことが必要となってくる。本研究では、繊維強化プラスチック(FRP)のラミナと呼ばれる単層板を、繊維方向が中央面对称になるように積層(個々の層は完全に接着されている)した長方形板を対象に、固有振動解析、座屈解析及び動的安定解析を行なう。数値解析において、材質の違った3種類の材料の長方形板を対象に、振動、座屈及び不安定領域を各種の境界条件および繊維方向のもとに明らかにする。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すような対称積層長方形板が静的面内力と変動面内力を受ける場合の運動方程式は次のように与えられる²⁾。ただし、面外せん断変形を除外し、カップリング項を無視する。

$$L(w) = D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (N_{x_0} + N_{x_0} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 D_1, D_2, D_3 : 板剛度、 w : たわみ、 h : 板厚、 ρ : 板の密度、 x, y : 平板中央面の座標系、 Ω : 変動面内力の円振動数、 t : 時間、 θ : 繊維方向(図-1参照)

長方形板の境界条件は、つぎの4種類を考える。

CASE I : 全周辺単純支持、CASE II : 荷重辺単純支持、他対辺固定、CASE III : 荷重辺固定、他対辺単純支持、CASE IV : 全周辺固定

式(1)の一般解は次のように仮定される。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$$

ここに、 T_{mn} : 時間関数、 W_{mn} : 境界条件を満足する座標関数
 また、 W_{mn} として自由振動の固有振動形を仮定すると、 W_{mn} に關して次式が成立する。

$$\frac{D_1^*}{\beta^4} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \xi^4} + \frac{2D_2^*}{\beta^2} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_3^* \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \eta^4} = \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (3)$$

ここに、 $\beta = a/b$ (縦横比)、 $D_1^* = D_1/D_1^0$ 、 $D_2^* = D_2/D_1^0$ 、 $D_3^* = D_3/D_1^0$ 、 $D_1^0 : \theta = 0^\circ$ の板剛度、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ 、 ω_{mn} : 固有円振動数

式(2)、(3)を式(1)に代入すれば、次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_{mn}(\tau) + \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{11}^2} T_{mn} \right\} W_{mn} + \frac{\pi^2 \lambda_{cr}}{k_{11}^4 \beta^2} (\bar{N}_{x_0} + \bar{N}_{x_0} \cos \bar{\omega} \tau) \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2} T_{mn} \quad (4)$$

ここに、 $\lambda_{cr} = N_{cr} b^2 / D_1^0 \pi^4$ (座屈固有値)、 $k_{11}^4 = \sqrt{\rho h b^4 \omega_{11}^4 / D_1^0}$ 、 $k_{11}^4 : \theta = 0^\circ$ の1次の振動固有値、 $\omega_{11}^4 : \theta = 0^\circ$ の1次の固有円振動数、 $\tau = \omega_{11} t$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}$ 、 $\bar{N}_{x_0} = N_{x_0} / N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{x_0} = N_{x_0} / N_{cr}$ 、 N_{cr} : 座屈面内力

式(4)にGalerkin法を適用してまとめると、次式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}\} + [B]\{T\} + (\bar{N}_{x_0} + \bar{N}_{x_0} \cos \bar{\omega} \tau)[C]\{T\} = \{0\} \quad (5)$$

ここに、 $A[j+(i-1)L, n+(m-1)L] = I'_{mnij}$ 、

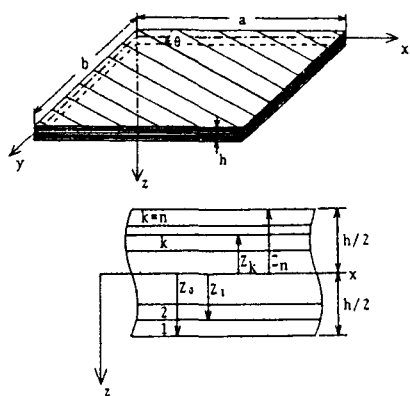


図-1 一般図

$$B\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = \alpha_{mn} I^1_{mnij}, \alpha_{mn} = \omega_{mn}^2 / \omega_{11}^0$$

$$C\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = \gamma I^2_{mnij}, \gamma = \pi^2 \lambda_{cr} / k_{11}^0 \beta^2$$

$$I^1_{mnij} = \int_0^1 \int_0^1 W_{mn} W_{ij} d\xi d\eta,$$

$$I^2_{mnij} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2} W_{ij} d\xi d\eta$$

$$(T) = (T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1N}, T_{21}, T_{22}, \dots, T_{NN})^T$$

式(5)の一般解を指数関数とフーリエ級数の積で仮定し調和バランス法を適用して、行列の固有値問題に変換する。これにより系の安定の判別を行なう。

3. 数値結果 (1)固有振動特性 図-2に全周単純支持正方形板(CASE I, $\beta=1.0$)の固有振動特性を示す。横軸 θ にはラミナの繊維方向、縦軸 ω^* には無次元固有振動数(等方性板の1次の固有振動数で無次元化)をとった。比較的異方性の度合いが小さいEGLASS/EPと異方性の度合いが大きいBORON/EPおよびGRAPHITE/EPを用いて計算を行なったところ、図のように異方性の度合いにより、振動数の変化に差異が見られる。

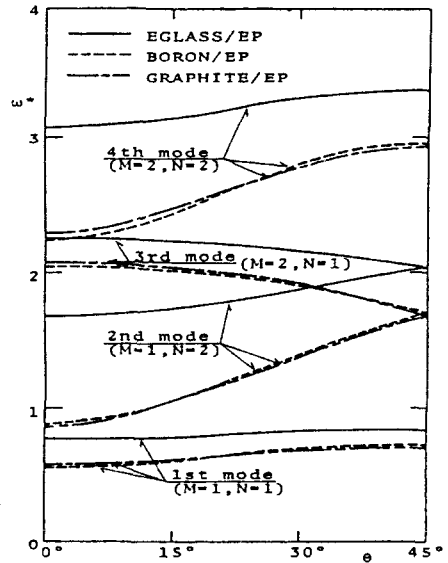


図-2 正方形板の固有振動特性

(2)座屈特性 図-3に全周単純支持長方形板(CASE I, EGLASS/EP)の座屈曲線を示す。ラミナの繊維方向を大きくすると座屈荷重は増加する。他の2種類の場合にも共通して言えるが、異方性の度合いが大きいほど繊維方向の変動による座屈荷重の変動は激しい。

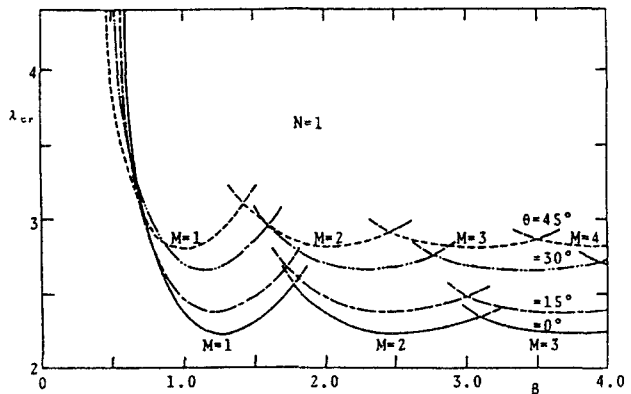


図-3 長方形板の座屈曲線

(3)不安定領域 図-4は、全周単純支持正方形板(CASE I, EGLASS/EP, $\beta=1.0$, $\theta=30^\circ$)の不安定領域を示したものである。縦軸 $\bar{N}_{x1}$ は変動面内力を座屈面内力で無次元化した無次元面内力の振幅、横軸 $\bar{\omega}$ は励振振動数を $\theta=0^\circ$ 時の1次の固有振動数で無次元化した無次元励振振動数である。図の不安定領域のようにCASE Iの場合には、単純共振のみが存在する。

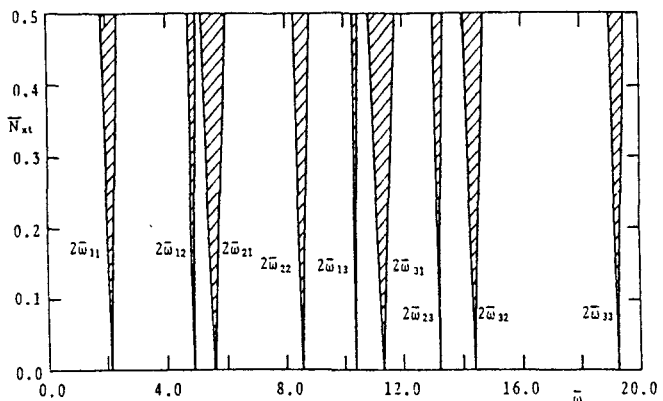


図-4 不安定領域

4. まとめ 固有振動数、座屈荷重に及ぼす境界条件の影響および不安定領域に関する詳しい結果については講演時に発表する。

参考文献

- 1) 福田：異方性の積極利用(I)，日本複合材料学会誌，14-1，pp.20-25，1988
- 2) 福田、野村、武田：複合材料の構造力学，日刊工業新聞社，pp.23-105，1987