部分修正系固有値解析の一計算法

熊本大学　学生員　内田　雅士　　八代高専　正　員　水田　洋司
熊本大学　正　員　平井　一男

1．まえがき

構造物の一部が修正されたとき、修正以前の原構造物（今後 system A とよぶ）のn次の固有値λnとそれに対応する固有ベクトルΦn (n = 1,2,3,…)とが求められておれば、その構造物の一部が変化してもその修正された構造物（今後 system B とよぶ）の固有値と固有ベクトルは修正部分と同じ次元を持つ行列を解いて求められる。この種の構造修正は塑性領域に入った場合、または最適設計においてしばしば取り扱われる。ここでは system A の固有値λn、固有ベクトルΦnを用いて system B の固有値、固有ベクトルを簡便に算定する一計算法を示す。

2．計算手法

system A が N個の集中荷重を持ち、その節点に $\mathbf{F}\sin\omega t$ の周期力が作用しているとき、system A の変形 $\mathbf{W_A}$ と $\mathbf{F}$ との関係は、式(1) で与えられる。$\mathbf{K}$：剛性マトリックス $\mathbf{M}$：質量マトリックス

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})\,\mathbf{W_A}=\mathbf{F}\qquad \lambda=\omega^2\quad(\omega：固有角速度)\qquad\cdots\cdots(1)$$

system A の固有値λn、固有ベクトルΦn (n = 1,2,3,…)を用い 式(2) の逆行列 $(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})^{-1}$ は modal analysis により求められる。すなわち

$$\mathbf{W_A}=\mathbf{f_d}\mathbf{F}=(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})^{-1}\,\mathbf{F}\qquad\cdots(2)$$

ここに $\mathbf{f_d}$ 中の i,j 要素 f_{dij} は

$$f_{dij}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Phi_{ni}\Phi_{nj}}{\lambda n-\lambda}\qquad(3)$$

であり Φ_{ni}, Φ_{nj} は Φn 中の i番目 j番目の要素である。 system A で $\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ が変化すると system B に対して 式(1) は自由振動時には

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}+\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M})\,\mathbf{W_B}=\mathbf{0}\qquad\cdots(4)$$

となる。いま system A が

$$\tilde{\mathbf{F}}=-(\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M})\,\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{A}\qquad\cdots(5)$$

の荷重を受けるとき、式(1) 式(2) より

$$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}+\Delta\mathbf{K}-\Delta\mathbf{M})\,\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{A}=\mathbf{0}\qquad\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{A}=\mathbf{f_d}\tilde{\mathbf{F}}\qquad\cdots\cdots(6)$$

となり 式(6) と 式(4) との比較より system B の自由振動は 式(5) の $\tilde{\mathbf{F}}$ を受ける system A の強制振動と等価なことがわかる。式(6) をまとめると 式(7) となる。$\mathbf{I}$：単位マトリックス

$$\{\mathbf{I}+(\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M})\,\mathbf{f_d}\}\,\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{0}\qquad\cdots\cdots(7)$$

この修正が系全体に対してごく一部に限られている場合には、$\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M}$ 中の大部分の行と列とが零要素のみ持つことになる。この零要素のみ持つ行と列とを取り除くと、全部が零でない要素を持つ行と列よりなる圧縮した行列が造られる。この圧縮した行列を $\Delta\bar{\mathbf{K}}-\lambda\Delta\bar{\mathbf{M}}$ と書くことにする。また、$\bar{\mathbf{F}}$ を $\tilde{\mathbf{F}}$ より零要素を取り除いたもの、$\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{d}$ を $\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M}$ 中の全ての零よりなる行と列とに対応するものを $\mathbf{f_d}$ より除いたものとする。そうすると 式(7) は 式(8) となる。

$$\{\mathbf{I}+(\Delta\bar{\mathbf{K}}-\lambda\Delta\bar{\mathbf{M}})\,\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{d}\}\,\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{0}\qquad(8)$$

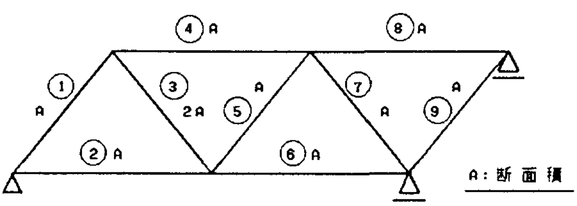
$\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{d}$ の 要素 f_{dij} は 式(3) で 分母 = 0 のとき無限大となるので以下の方法をとる。今、$\Delta\bar{\mathbf{M}}=\mathbf{0}$ とし、式(8) に無次元量 α を導入し、固有値問題の式とする。

$$\{\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{d}^{-1}-\alpha\Delta\bar{\mathbf{K}}\}\,\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{A}=\mathbf{0}\qquad\bar{\mathbf{W}}_\mathbf{A}=\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{d}\bar{\mathbf{F}}\qquad\cdot(9)$$

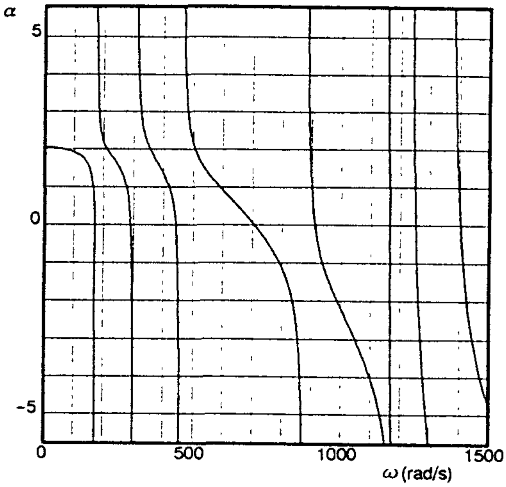
式(9) は固有値解析法（例えばQR法）で解くことができる。 このときまずλを仮定しαを求める。$\alpha=1$のとき仮定したλが system B の固有値となる。

3．数値計算

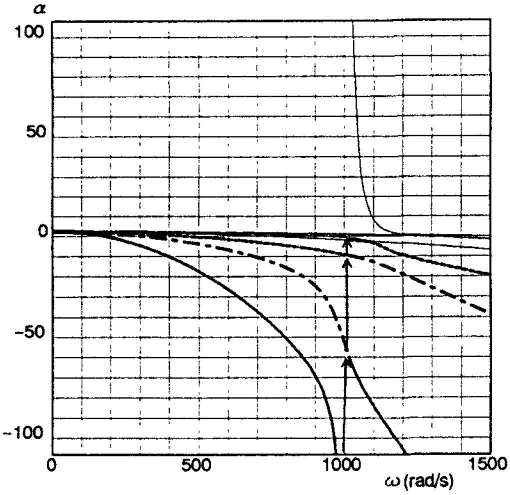
トラスを解析モデル（下図）としてαの特性を判定できる数値解析例を示す。トラスの部材断面を変化させ、無次元量αと固有角速度ω（$\omega^2=\lambda$）の関係を表すものが図１、２、３である。ここで注意を要するのは図２、３の矢印方向に曲線が不連続的に変化することである。不連続点の左右における細線、太線、点線、鎖線などがαの特性を示す。



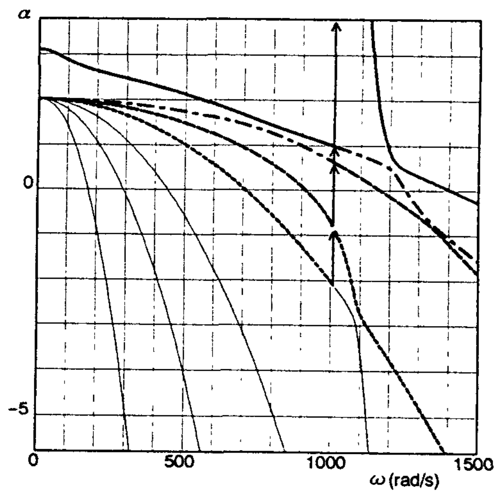
解析モデル　(system A)



（図１）①部材断面を1/2倍したとき



（図２）①～⑦部材断面を1/2倍したとき
（αの範囲が大のとき）



（図３）①～⑦部材断面を1/2倍したとき
（αの範囲が小のとき）

4．結論

数値計算より下記のようなαの特性がわかる。

① $\alpha=0$ のとき、system A の固有値となる。

② $\alpha=1$ のとき、system B の固有値となる。

③ α が、任意の λ（$=\omega^2$）に対し $\Delta\overline{K}$ の自由度数だけ現れる。

以上より 上記の方法で system B の固有値、固有ベクトルを求められるが、不連続点が現れるので今後これについて検討していくことが必要である。

参考文献

Hirai, Yoshimura and Takamura, On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, Int. J for Numerical Method in Engineering, Vol.6, pp.441～442