

有限変位仮想仕事の定理によるトラスの一解析法

熊本大学工学部	学生員	○竹下 勝弥
同上	正 員	小林 一郎
同上	正 員	三池 亮次
佐伯鶴岡高校	正 員	佐藤 啓治

1. はじめに 仮想仕事の原理において変位に対して外力のなす仮想仕事は、内力が仮想ひずみに対してなす仕事に等しいが変位が有限の場合この仮想ひずみの中に、見かけのひずみを考慮すべきである。トラス構造のように、内力として軸力のみが生ずる場合この見かけのひずみは部材の剛体的回転を与えることになる。またこの有限変位仮想仕事の定理と、接続マトリックス C' を用い、われわれは割線型の骨組構造の有限変位解析の基礎式を誘導した。¹⁾ この解法に従うなら、荷重のきざみをかなり大きくとつても、有限変形の解析が可能である。

有限変位解析の一つの目的は、屈伏座屈、分岐座屈現象の解明にある。この観点から、有限変形を考慮した接線型の剛性マトリックスを、一般的形式で表現することも必要である。本論では、上記の割線型の基礎式を微分することによって接線剛性マトリックス形式の有限変形基礎式を誘導し、幾何剛性マトリックス K_G が接続マトリックス C の微分形で一般化できることを述べ、2部材トラスによる解析例を示す。

2. 有限変形構造解析の一般式の誘導 われわれは、さきの有限変位仮想仕事の定理に従って、次のような割線型の基礎式を誘導した。

$$\Delta P = K \Delta d + b \quad (1)$$

ここに、 ΔP は増分荷重、 K は全体剛性マトリックス、 Δd は増分変位、 b は有限変位に関する補正項である。また、 $K = (C' + \Delta C)K_m(C' + \Delta C)^T$ 、 $b = \Delta C P_m - (C' + \Delta C)K_m \Delta e_\theta$ となる。ここに、 K_m は、部材剛性マトリックスで、トラスの場合バネ定数 $k = EA_I/L_I$ からなる対角マトリックス、 E : ヤング率、 A : 部材断面積、 L : 部材長、添字 I は、第 I 部材を意味する。 P_m : 部材断面力でトラスの場合には軸力 N によって構成される。 Δe_θ は伸びの付加項で、部材回転角を $\Delta \theta$ とすると、 $1 - \cos \Delta \theta$ を要素とするベクトルである。(1) 式の Δd についての $\Delta d = 0$ における微分は、

$$\delta \Delta P = \left[\frac{\partial K}{\partial \Delta d_1} \delta \Delta d_1 \Delta d + \cdots \right]_{\Delta d=0} + \{K\}_{\Delta d=0} \delta \Delta d + \left[\frac{\partial \Delta C}{\partial \Delta d_1} \delta \Delta d_1 P_m + \frac{\partial \Delta C}{\partial \Delta d_2} \delta \Delta d_2 P_m + \cdots \right]_{\Delta d=0} \quad (2)$$

$$\equiv \{K\}_{\Delta d=0} \delta \Delta d + \left[\frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d} \otimes P_m \right]_{\Delta d=0} \delta \Delta d \equiv [K_E + K_G] \delta \Delta d \equiv K' \delta \Delta d \quad (3)$$

ここに、 K_E, K_G は、弾性剛性マトリックス、幾何剛性マトリックス

$$K_E \equiv \{K\}_{\Delta d=0} = C' K_m C'^T, K_G = \frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d} \otimes P_m \equiv \left[\frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d_1} P_m, \frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d_2} P_m, \cdots \right] \quad (4)$$

と定義する。又、 Δe_θ は2次の微小項であるので無視できる。

3. トラス部材の方向余弦の微分²⁾ 図-1に示される変形後における、トラス部材 AB の、部材長を $\ell = \sqrt{\{x_2 - x_1\}^2 + \{y_2 - y_1\}^2}$ その方向余弦を $\cos \theta = \lambda$, $\sin \theta = \mu$ とする。ここに (u_1, v_1) , (u_2, v_2) はそれぞれ始端 A と終端 B における X 軸と Y 軸方向の変位で、式(1)の変位増分 Δd の要素である。

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \right)_{\Delta d=0} = -\frac{\mu'^2}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} \right)_{\Delta d=0} = \frac{\lambda' \mu'}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial u_1} \right)_{\Delta d=0} = \frac{\lambda' \mu'}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial v_1} \right)_{\Delta d=0} = -\frac{\lambda'^2}{\ell'} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \right)_{\Delta d=0} = \frac{\mu'^2}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v_2} \right)_{\Delta d=0} = -\frac{\lambda' \mu'}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial u_2} \right)_{\Delta d=0} = -\frac{\lambda' \mu'}{\ell'}, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial v_2} \right)_{\Delta d=0} = \frac{\lambda'^2}{\ell'} \quad (6)$$

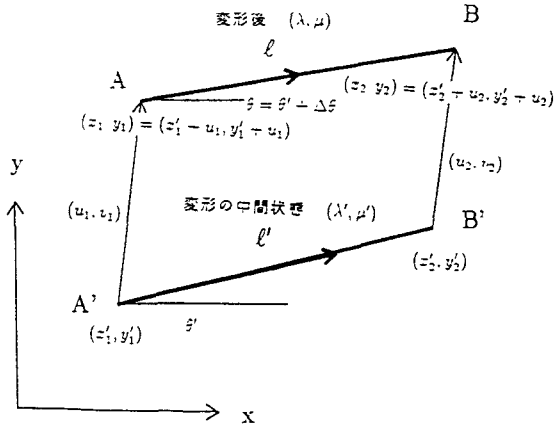


図-1 トラス部材 (A-B) の
中間状態からの変位

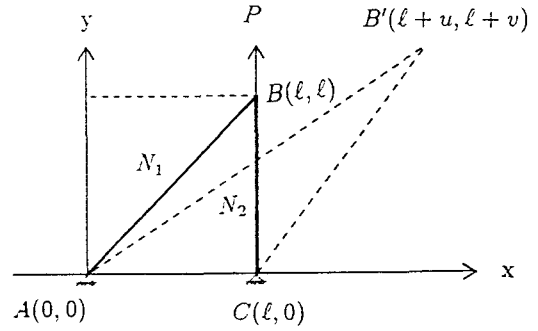


図-2 2 部材トラス

4. 2 部材トラスの有限変位解析 図-2 の 2 部材トラスの節点 B に荷重 $(0, P)$ が作用するとき、式 (3) において弾性剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスは

$$K_E = C' K_m C'^T = \frac{\sqrt{2}AE}{4\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad C' + \Delta C = \begin{bmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 \\ \mu'_1 & \mu'_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(C' + \Delta C)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1'^2}{\ell_1} & \frac{\mu_2'^2}{\ell_2} \\ -\frac{\lambda_1'\mu_1'}{\ell_1} & -\frac{\lambda_2'\mu_2'}{\ell_2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial(C' + \Delta C)}{\partial v} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1'\mu_1'}{\ell_1} & -\frac{\lambda_2'\mu_2'}{\ell_2} \\ \frac{\lambda_1'^2}{\ell_1} & \frac{\lambda_2'^2}{\ell_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P'_m = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K_G = \left[\frac{\partial(C' + \Delta C)}{\partial u}, \frac{\partial(C' + \Delta C)}{\partial v} \right] \otimes P_m = \frac{1}{2\ell} \begin{bmatrix} 2P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。よって

$$K' = \frac{\sqrt{2}AE}{4\ell} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\sqrt{2}}{AE}P & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

座屈の条件 $|K'| = 0$ より座屈荷重 $P = -\frac{2\sqrt{2}-1}{7}AE$ を得る。
 $A = 1.0\text{cm}^2, E = 1000\text{kg/cm}^2, \ell = 1000\text{cm}$ の時 $P = -261.2\text{kg}$ である。

参考文献

- 1). Miike, R., Kobayashi, I., Yamada, Y.; Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, EM. Vol. 116, No. 2, ASCE, Feb., 1990.
- 2). 小林 一郎、三池 亮次、吉本 俊裕; 接続マトリックスを用いた骨組構造物の最適設計, 土木学会論文報告集 337 号 1983 年 9 月