

有限要素法における周辺メッシュ座標の影響

熊本大学 学生員 松尾 仙彦 八代高専 正 員 内山 義博

熊本大学 正 員 平井 一男

(1) まえがき

有限要素法については、長年にわたり研究され、現在では、構造物の設計等において不可欠なものとなっている。有限要素法は本質的には近似解法であり、要素分割を多くするほど精度は上がるはずである。しかし、計算機の容量や計算時間の問題から分割数の上限には制限がある。そこで、メッシュ座標の変化が固有値に及ぼす影響より、メッシュ分割及び形状の適否の検討を行う。

(2) 理論

i) 固有値の微分

$$(K - \lambda M)\Phi = 0 \quad (1) \quad (1) \text{式を転置して} \quad \Phi^T (K - \lambda M) = \Phi^T (K - \lambda M) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{式を} x \text{ で微分する} \quad \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} M - \lambda \frac{\partial M}{\partial x} \right) \Phi + (K - \lambda M) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$(3) \text{式に左から} \Phi^T \text{ をかける} \quad \Phi^T \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} M - \lambda \frac{\partial M}{\partial x} \right) \Phi + \Phi^T (K - \lambda M) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$(2) \text{式より} \quad \Phi^T \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \lambda \frac{\partial M}{\partial x} \right) \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Phi^T M \Phi = 0 \quad (5)$$

$$\Phi^T M \Phi = 1 \text{ より} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \Phi^T \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \lambda \frac{\partial M}{\partial x} \right) \Phi \quad (6)$$

Φ : 正規化モード K : 剛性マトリックス (対称) M : 質量マトリックス (対称) λ : 固有値
ここで M は各節点に接する要素の1/3の質量をその節点に集めたものである。尚、固有値はQR法によって求めた。

j) 剛性マトリックスの微分

n 番目の三角形要素の剛性マトリックスを K_n とすると

$$K = \sum K_n = \sum \Delta_n / 2 \quad B_n^T D B_n \quad (7) \quad D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Y_{j,k} & 0 & Y_{k,i} & 0 & Y_{i,j} & 0 \\ 0 & X_{k,i} & 0 & X_{i,j} & 0 & X_{j,k} \\ X_{k,i} & Y_{j,k} & X_{i,j} & Y_{k,i} & X_{j,k} & Y_{i,j} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \bar{B} \quad (9)$$

図-1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = X_j Y_k + X_k Y_i + X_i Y_j - X_j Y_i - X_i Y_k - X_k Y_j \quad (10) \quad E : \text{ヤング率}$$

ν : ポアソン比

(7)式を x で微分すると

$$\frac{\partial K_n}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_n}{\partial x} B_n^T D B_n + \frac{\Delta_n}{2} \frac{\partial B_n^T}{\partial x} D B_n + \frac{\Delta_n}{2} B_n^T D \frac{\partial B_n}{\partial x} \quad (11)$$

$$\text{また} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \bar{B} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{\partial \Delta}{\partial x} \bar{B} \right) \quad (12)$$

ここでB を各節点(i, j, k)で微分すると次式になる

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial x_i} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (13)$$

また

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = Y_{i,k} = Y_j - Y_k \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} = Y_{k,i} = Y_k - Y_i \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} = Y_{i,j} = Y_i - Y_j \quad (14)$$

(13)および(14)式を(12)式に代入することにより $\frac{\partial B}{\partial x}$ が求まり更に $\frac{\partial K}{\partial x}$ が求まる。

k) 質量マトリックスの微分

$$M = w \cdot A \cdot t = w \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot t \quad (15) \quad x \text{ で微分すると } \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{w \cdot t}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \quad (16)$$

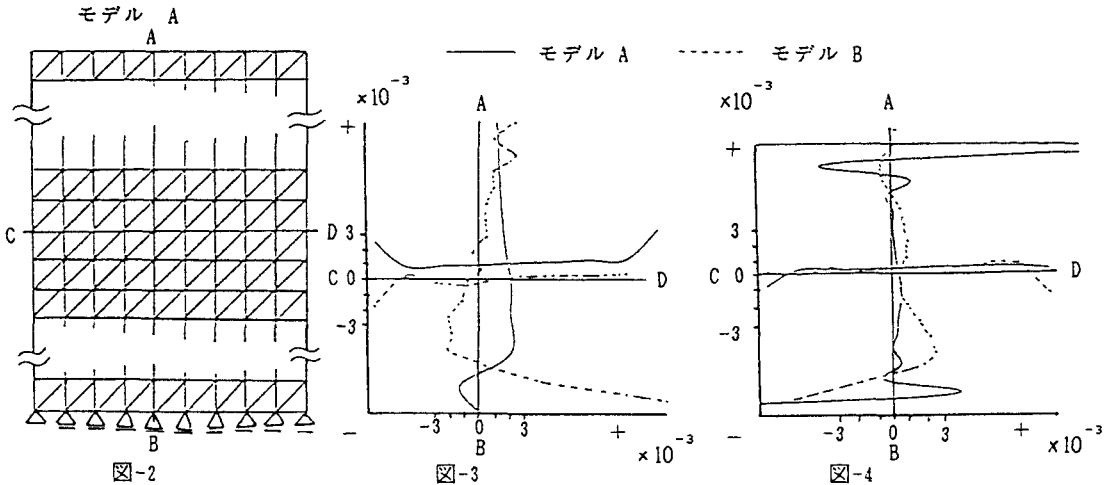
w : 単位体積質量 t : 板厚 Δ : 要素の面積

ここで $\frac{\partial \Delta}{\partial x}$ は(14)式によって既に分かっているので $\frac{\partial M}{\partial x}$ が求まる。よって求めた $\frac{\partial M}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial K}{\partial x}$ を(6)式

に代入することにより固有値の微分値 $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)$ を求めることができる。

(3) 数値計算例

図-2の長方形板を縦18分割、横9分割(縦横比2:1)にしたメッシュで斜線方向を図-2のように切ったモデルAと逆斜方向に切ったモデルBのA-B, C-D断面上の $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ を図-3、図-4に示す。



i) 結論

- ①特に大きな微分値はみられなかった。
- ②全体的傾向として、固有値によっては程度の差はあるが、面に直角方向の微分値が大きな値をもつ傾向がある。
- ③メッシュの切り方によって微分値に差がでてくる。