

面内圧縮荷重を受ける平板の複合非線形解析

長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅
 長崎大学 工学部 正 員 松田 浩
 長崎大学 工学部 正 員 森田千尋
 長崎大学 工学部 学生員 ○富重健一

1. まえがき

著者らは先に、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、平板の離散的な一般解を求める手法を用い¹⁾、面内圧縮荷重を受ける平板の、幾何学的非線形性を考慮した有限変位解析法を提示した。²⁾ しかしながら、現実の構造物の挙動を把握するためには、塑性変形を伴う材料非線形性をも考慮する必要がある。そこで本研究は、材料が弾性限度を超え、ひずみが弾性成分のほかに塑性成分を含む領域の計算、すなわち、平板の弾塑性有限変形問題に対する一離散解法を提示するものである。

2. 平板の増分形基礎微分方程式

板厚中央面上の、 x 、 y 方向の面内変位成分を u 、 v および垂直方向の変位成分を w とし、面内力を N_{xy} 、 N_y 、 N_x 、せん断力を Q_y 、 Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y 、 M_x 、たわみ角を θ_y 、 θ_x とすれば、せん断変形の影響を考慮した平板の増分形の基礎微分方程式は、以下ようになる。

(1) 面外変形に関する基礎微分方程式

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \Delta Q + \Delta N_c = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-2) \quad \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{11} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{12} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{13} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{11} \Delta e_x + \phi_{12} \Delta e_y + \phi_{13} \Delta e_{xy}) \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{21} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{22} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{23} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{21} \Delta e_x + \phi_{22} \Delta e_y + \phi_{23} \Delta e_{xy}) \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{31} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{32} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{33} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{31} \Delta e_x + \phi_{32} \Delta e_y + \phi_{33} \Delta e_{xy}) \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa Gh} \quad (1-7) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa Gh} \quad (1-8)$$

(2) 面内変形に関する基礎微分方程式

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2-1) \quad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{11} \Delta N_x + \bar{\psi}_{12} \Delta N_y + \bar{\psi}_{13} \Delta N_{xy}) - h (\psi_{11} \Delta \beta_x + \psi_{12} \Delta \beta_y + \psi_{13} \Delta \beta_{xy}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right]^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{21} \Delta N_x + \bar{\psi}_{22} \Delta N_y + \bar{\psi}_{23} \Delta N_{xy}) - h (\psi_{21} \Delta \beta_x + \psi_{22} \Delta \beta_y + \psi_{23} \Delta \beta_{xy}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right]^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{31} \Delta N_x + \bar{\psi}_{32} \Delta N_y + \bar{\psi}_{33} \Delta N_{xy}) - h (\psi_{31} \Delta \beta_x + \psi_{32} \Delta \beta_y + \psi_{33} \Delta \beta_{xy}) - \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \quad (2-5)$$

ここに、 $q=q(x, y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/[2(1+\nu)]$:せん断弾性係数、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、
 $h=h(x, y)$:板厚、 $D=D(x, y)=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$:板の曲げ剛度、 $F=F(x, y)=Eh/(1-\nu^2)$:板の伸び剛度、
 ν :ポアソン比、 Δ :断面力および変形量の増分、 ΔN_c :各荷重増分段階における不平衡力、
 $[\bar{\varphi}_{ij}]=[\varphi_{ij}]^{-1}$ 、 $[\bar{\psi}_{ij}]=[\psi_{ij}]^{-1}$ 、 $[\Phi_{ij}]=[\bar{\varphi}_{ij}][\chi_{ij}]$ 、 $[\Psi_{ij}]=[\bar{\psi}_{ij}][\chi_{ij}]$

3. 基礎微分方程式の離散的な一般解

面外変形に関する式(1-1)～(1-8)および面内変形に関する式(2-1)～(2-5)において、無次元量 $X_1 \sim X_8$ 、 $X_9 \sim X_{13}$ および η 、 ζ

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_5 &= a M_x / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x, \quad X_8 = w/a, \quad \eta = x/a, \quad \zeta = y/a, \\ X_9 &= v/a, \quad X_{10} = u/a, \quad X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1-\nu^2)], \\ a, b &: \text{矩形板の横縦の辺長}, \quad \mu = b/a, \quad h_0: \text{基準板厚}, \quad D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]: \text{基準板曲げ剛度} \end{aligned}$$

を導入し無次元化後、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、平板の縦、横の等分割線の交点に関する離散解 ΔX_{pij} ($p=1 \sim 8, 9 \sim 13$)は、それぞれ以下のように整理される。

$$\begin{aligned} (p=1 \sim 8) \\ \Delta X_{pij} &= \sum_{d=1}^8 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \cdot \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \cdot \Delta X_{s0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-1) \\ &\quad (r=1, 3, 4, 6, 7, 8, \quad s=2, 3, 5, 6, 7, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p=9 \sim 13) \\ \Delta X_{pij} &= \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \cdot \Delta X_{tk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \cdot \Delta X_{u0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-2) \\ &\quad (t=9, 10, 11, 12, \quad u=9, 10, 11, 13) \end{aligned}$$

この離散的な一般解 ΔX_{pij} を求める方法の詳細については、文献1)を参照されたい。

4. 解析結果

数値解析例として、初期たわみ(w^0/h)を有する4辺単純支持板の面内耐荷力解析を行った。解析に用いた平板は、降伏応力 $\sigma_y=2800 \text{ kg/cm}^2$ 、弾性係数 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、縦横方向の分割数 $m=n=8$ 、板厚方向の分割数 $n_z=20$ とした。Fig. 1に、板厚辺長比 h/a を種々変化させた場合の中央点に関する荷重-たわみ曲線を、また、Fig. 2に、種々の初期たわみについての耐荷力曲線をそれぞれ示す。

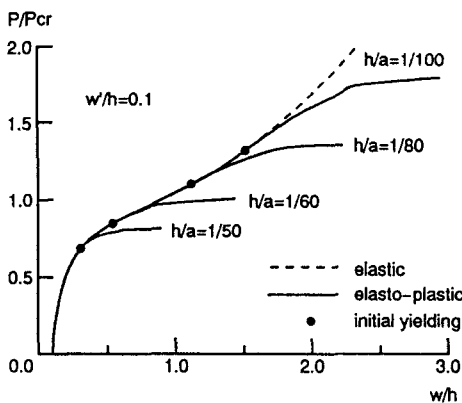


Fig.1 荷重-たわみ曲線

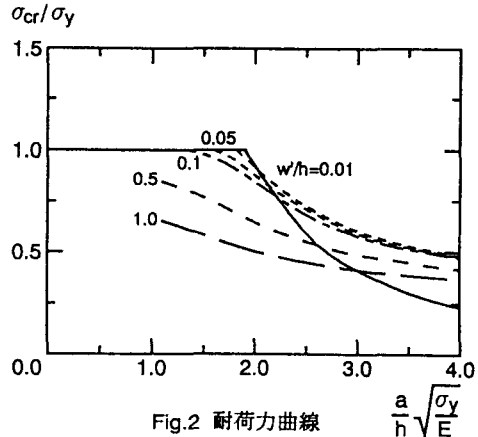


Fig.2 耐荷力曲線

[参考文献]

- 1) 崎山毅・松田浩: 変厚矩形板の曲げの一般解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp. 21-28, 1983.
- 2) 森田千尋他: 面内圧縮荷重を受ける平板の有限変位解析, 土木学会第46回年次学術講演会講演概要集, [-9, pp. 56-57, 1991.