

非定常傾斜プリュームの数値モデル

九州工業大学工学部 学生員 ○河野謙介
同上 正員 秋山壽一郎、浦 勝

1. 序論

周囲水より密度の大きい水が傾斜面上に連続的に放出されると、傾斜面に沿って発達し、先端部と後続部より成る傾斜プリュームを形成する。傾斜プリュームに関する従来の理論研究は流入条件が連続的かつ一定に維持された場合を対象としている。しかし、実用計算では非定常な条件下で流れの特性を予測することが要求される。更に、流入条件と底面勾配を与えることにより、プリューム先端部の挙動を予測することも必要である。本研究は、このような立場より、非定常傾斜プリュームの数値モデルを求めたものである。

2. 理論

水平面と角度 θ をなす傾斜面上を流下する傾斜プリュームを図-1に示すようにモデル化する。座標軸は傾斜面に沿ってx座標、これと直交上向き方向にy座標を取る。以下、それぞれの領域に対して支配方程式を求める。

後続部の支配方程式：後続部は先端部で間欠的に発生する渦が置去られることによって形成される層と重い流入水によって形成された下層の上部とが混ざりあった混合層、及び通常定常部と呼ばれる下層の2つの層から構成されている。ここでは、後続部は混合層も含めた厚さと考え、連行量の評価を考慮した1次元非定常2層流としてモデル化を行なう。基礎方程式は、 h を層厚、 B と U を断面平均浮力及び流速として、それぞれ式(1)~(3)で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Uh}{\partial x} = E_a U \quad (1), \quad \frac{\partial Bh}{\partial t} + \frac{\partial BUh}{\partial x} = 0 \quad (2), \quad \frac{\partial Uh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{f_2 Bh^2 \cos \theta}{2} \right) = f_1 Bh \sin \theta - f_b U^2 \quad (3)$$

ここに、 E_a =連行係数、 f_b =底面抵抗係数、 $B=(\Delta\rho/\rho_w)g$ 、 g =重力加速度、 ρ_w =周囲水の密度、 $\Delta\rho$ =密度差。

f_1 と f_2 は次式で定義される形状係数であり、連行係数 E_a は芦田・江頭による経験式を使用する。

$$f_1 = \int bdy/Bh \quad (4), \quad f_2 = \int 2bydy/Bh^2 \quad (5), \quad E_a = 0.0015/R \quad (6)$$

ここに、 b =局所浮力、 R =Overall Richardson数($=Bh \cos \theta / U^2$)。

本研究では、式(1)と(3)を特性曲線法を用いて解くことにより流速 U と層厚 h を求め、同時に式(2)を差分化し、式(2),(7),(8)を連立させて流速 U 、層厚 h 、浮力 B を解く方法を用いた。形状係数 f_1, f_2 を x と t に対して独立と仮定し、式(1)と(2)の偏微分方程式を x - t 平面上の1対の特性方程式と1対の全微分方程式に変形すると、式(7)と(8)が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda A_2 \quad (7), \quad \frac{dU}{dx} + H \frac{dh}{dx} + G = 0 \quad (8)$$

ここに、 H 及び G は次式で与えられる。

$$H = \frac{U + \lambda A_2}{h + \lambda}, \quad G = \frac{A_1 + \lambda A_3}{h + \lambda}, \quad \lambda = \pm \frac{(h/U)(D_2 + \sqrt{D_1})}{D_2 U}, \quad D_1 = f_2 R, \quad D_2 = -f_2 R, \quad D_3 = 0$$

$$A_1 = -E_a U, \quad A_2 = f_2 R U^2 / h, \quad A_3 = U^2 [R \{ (f_2/2)(h/B) \frac{dB}{dx} - f_1 \tan \theta \} + f_b + E_a] / h$$

先端部の支配方程式：先端部重心とともに移動する座標系を用い基礎方程式を導く。先端部移動速度は後続部より遅いため、高密度の流体が後続部から先端部へ送りこまれる。それと同時に先端部では強い渦運動のため周囲水が連行され、先端部は希釈混合される。希釈された流体は境界面に発生した強いシアアのため引きちぎられ、先端部後方へ混合流体を残し混合層を形成する。後続部から先端部へ供給される流量を q_1 、先端部における連行量を q_0 、先端部から出ていく流量を q_0 とし、これらを(9)~(11)式のように仮定し、対応する浮力束 q_{01}, q_{02}, q_{00} を式(12)~(14)で与える。

$$q_1 = h(U - U_r) \quad (9), \quad q_0 = E_a U_r L \quad (10), \quad q_0 = (h_r - h)(U_r - U_m) \quad (11)$$

$$q_{01} = Bh(U - U_r) \quad (12), \quad q_{02} = 0 \quad (13), \quad q_{00} = B_m(h_r - h)(U_r - U_m) \quad (14)$$

ここに、 E_a =先端部における連行係数、 h_r =先端部最大厚、 L =先端部の長さ、 U_m =混合層の平均流速、 B_m =混合層の平均浮力、 U_r =先端部重心の移動速度。

先端部の形状は式(15)と(16)で定義される断面アスペクト比 $f(\theta)$ と体積補正係数 S_1 によって表現することが可能である。

$$f(\theta) = h_r / L \quad (15), \quad S_1 = A / (h_r L) \quad (16) \quad \text{ここに、} A = \text{先端部の断面積。}$$

上記の諸関係を考慮すると、運動量方程式、体積、及び質量保存の式は(17)~(19)式で与えられ、先端部移動速度 U_r は先端重心移動速度 U_r と先端部の発達率との和で決定されると仮定すると、(20)式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} [(1 + A_m) S_1 U f(\theta)^2] = [g(S_1 - 1) + S_1 B_r] h_r^2 \sin \theta + f(\theta) [k_a B_r (h_r^2 - h^2) \frac{\cos \theta}{2} - \frac{B h^2}{2} \cos \theta + (1 + \frac{B}{g}) h(U - U_r)^2 - k_a^2 (\frac{k_a B_r}{g} (h_r - h) U_r^2 - C_d U_r^2 h_r)] \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} [S_1 h_r^2] = f(\theta) [(U - U_r) h - k_a U_r (h_r - h)] + E_a U_r h_r \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} [S_1 B_r h_r^2] = f(\theta) [B(U - U_r) h - k_a B U_r (h_r - h)] \quad (19)$$

$$U_r = U_r + \frac{1}{f(\theta)} \frac{dh_r}{dt} \quad (20)$$

ここに、 A_m =付加質量係数、 C_d =抵抗係数、 k_a, k_b は次式で定義される補正係数。

$$k_a = 1 - U_m / U_r \quad (21), \quad k_b = B_m / B_r \quad (22)$$

$f(\theta)$ に関しては、広範囲の θ に対して得られたBritter・Lindenの結果に基づく関係式を用いる。

$$f(\theta) = 0.00275\theta + 0.24, \quad \theta = 5^\circ \sim 90^\circ \quad (23)$$

一方、 S_1 については、広範囲の底面勾配を対象として、先端部形状を矩形と仮定し、本モデルでは $S_1=1.0$ と置く。矩形形状に対する付加質量 M' 、及び付加質量係数 A_m はそれぞれ式(24)と(25)で表わされ、 P は近似的に式(26)で表わされる関数である。

$$M' = \rho_s P x h_r^2 / 4 \quad (24), \quad A_m = P x f(\theta) / 4 \quad (25)$$

$$P = 2.50 - 1.176f(\theta) + 0.761f(\theta)^2 \quad (26)$$

3. 数値計算法

後続部は Δx を指定し、式(2),(7),(8)を差分化し、上流端での境界条件 $[U(0,t), B(0,t), h(0,t)]$ を与え、上流から下流に向かって計算を進めた。 Δx は質量保存条件と計算の効率を考慮して初期層厚の10%とした。 Δt はクーロン条件を満足するように定めた。先端部の諸量は後続部を解いて得られた値を先端部の境界条件として、式(17),(18),(19)の連立常微分方程式を4次のルンゲ・クッタ法で計算した。後続部と先端部は、両領域での計算経過時間が同一である事実を考慮し、これを接続条件とした。 Δx を初期層厚の10%とした場合、 $\theta = 5^\circ \sim 60^\circ$ の範囲に対して質量の流入量と流動層における貯留量との相対誤差は約2.5%程度であった。

4. モデルcalibrationとSimulation

本モデルは未定の係数 f_0, C_d, E_d, k_u, k_g を含むので、これらの値を決定する必要がある。傾斜ブリュームは流れの確立領域では先端移動速度及び層厚変化率は一定となる。モデルのcalibrationは、この流れの確立領域を対象として行なった。本研究では、 f_0 の決定のためにEllison・Turnerによって得られた連続下層密度流の層厚変化率 dh/dx を用い、先端部における諸係数 (C_d, E_d, k_u, k_g) の決定のためには、Britter・Lindenによって得られた無次元先端移動速度 U_{re} と層厚変化率 dh_r/dx 及び $dh_{re}/dx=0$ と dh_r/dx 一定の条件を用いた。ここに、 U_{re} は流入浮力束 $B_0 q_0$ により無次元化された先端移動速度で $U_{re} = U_{re} / (B_0 q_0)^{1/3}$ で定義される。結果として、 $f_0=0.01, k_u=0.6, k_g=0.2$ 、及び図-3に示す C_d 及び E_d の値が得られた。 $U_{re}, dh/dx$ と dh_r/dx の計算結果を図-4と5に示す。両図から明らかなように、 f_0, k_u, k_g, C_d, E_d を与えれば、広範囲の斜面勾配 θ に対して、Britter・Lindenによって整理された結果と良く一致する。次に、図-6に流速(U, U_r, U_{re})、層厚(h, h_r)、浮力(B, B_r)のSimulation結果を示す。

5. 結論

本モデルは底面勾配と上流端での流入条件を与えることにより、先端部並びに後続部の流速、浮力、層厚などの特性量の時・空間変化を同時に追跡することができる。

表-1 Calculation Conditions

Upstream B.C.	U_0 (m/s)	h_0 (m)	ε_0
1	0.06	0.04	0.005
2	0.08	0.02	0.01
3	0.12	0.02	0.005

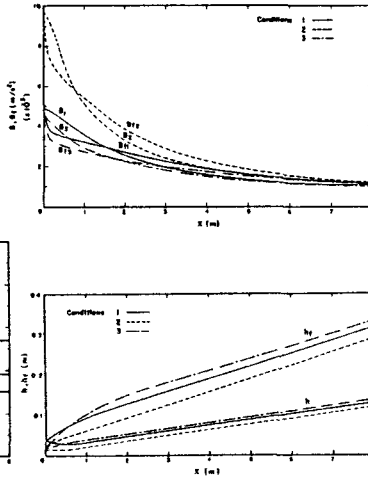
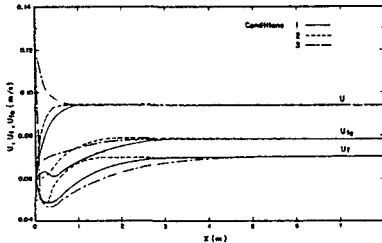


図-6 Results of Simulation

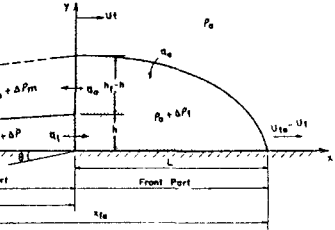


図-1 Definition sketch of Inclined Plume

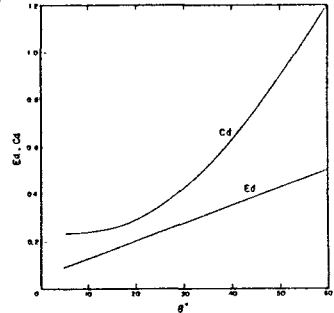


図-3 Dependence of E_d and C_d on θ

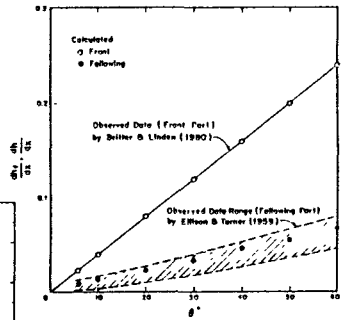


図-4 Dependence of dh_r/dx , dh/dx on θ

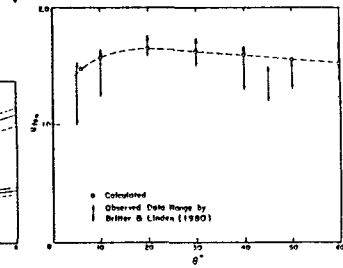


図-5 Dependence of U_{re} on θ

参考文献

- 1) Britter & Linden: J. Fluid Mech., 1980; 2) 福岡ら: 土木学会論文報告集, No. 274, 1978; 3) Hadano: Memoirs of the Faculty of Eng., Kyushu Univ., vol. 41, no. 4, 1981; 4) Akiyama, Wang & Ura: Proc. 7th Congress, APD, IAHR, Vol. 1, Beijing, 1990; 5) Ashida & Egashira: Proc. 17th Congress, Vol. 2, IAHR, 1977; 6) Ellison & Turner: J. Fluid Mech. Vol. 6, 1959