

一般化座標を用いたセキのまわりの流れの数値解析

長崎大学工学部 正員 ○薦田廣章

長崎大学工学部 上杉吉史

1. はじめに

一般化座標を用いてセキのまわりの流れを解析したので報告する。このコードは以下の特徴を持っている。

- ・基礎式を一般曲線座標で展開しているので、任意の境界形状を取り扱うことが可能である。
- ・移流項の差分化に際し高精度の上流差分スキームを用いているので、非物理的振動を防ぐことができる。
- ・乱流場が解析できるように標準的な $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルを組み込んでいる。

2. 基礎方程式

(ξ, η) 座標を用いた2次元非圧縮粘性流体の運動方程式および連続方程式は以下のようになる。

$$q_t + E_\xi + F_\eta = \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) R \right\}_\xi + \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) S \right\}_\eta + T \quad (1)$$

$$q = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad E = J^{-1} \begin{pmatrix} U \\ uU + \xi \hat{p} \\ vU + \xi \eta \hat{p} \end{pmatrix}, \quad F = J^{-1} \begin{pmatrix} V \\ uV + \eta \hat{p} \\ vV + \eta \eta \hat{p} \end{pmatrix}, \quad T = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g_x \\ g_y \end{pmatrix},$$

$$R = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (2\xi \kappa^2 + \xi \eta^2) u_\xi + (2\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) u_\eta + \xi \nu (\xi \kappa v_\xi + \eta \kappa v_\eta) \\ (\xi \kappa^2 + 2\xi \eta \eta_\eta) v_\xi + (\xi \kappa \eta + 2\xi \eta \eta_\eta) v_\eta + \xi \nu (\xi \eta u_\xi + \eta \eta u_\eta) \end{pmatrix}$$

$$S = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (2\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) u_\xi + (2\eta \kappa^2 + \eta \eta_\eta) u_\eta + \eta \nu (\xi \kappa v_\xi + \eta \kappa v_\eta) \\ (\xi \kappa \eta + 2\xi \eta \eta_\eta) v_\xi + (\eta \kappa^2 + 2\eta \eta_\eta) v_\eta + \eta \nu (\xi \eta u_\xi + \eta \eta u_\eta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここに、 u, v は x, y 方向の平均流速成分、 $\hat{p}$ は圧力 ($\hat{p} = p + 2/3 k$)、 Re はレイノルズ数、 g_x, g_y は重力加速度成分である。また、 ν_t は渦動粘性係数であり、 $\nu_t = C_k k^2 \varepsilon^{-1}$ とおくことができる。 U, V, J は変換後の ξ, η 座標の流速成分および Jacobian で、以下の式で示される。

$$U = \xi \kappa u + \xi \eta v, \quad V = \eta \kappa u + \eta \eta v, \quad J = \xi \kappa \eta_\eta - \xi \eta \kappa_\eta \quad (3)$$

$k \sim \varepsilon$ の輸送方程式は下記のようになる。

$$(J^{-1} k)_t + (J^{-1} k U)_\xi + (J^{-1} k V)_\eta =$$

$$[J^{-1} \{ (\xi \kappa^2 + \xi \eta^2) k_\xi + (\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) k_\eta \} (1/Re + \nu_t / \sigma_k)]$$

$$+ [J^{-1} \{ (\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) k_\xi + (\eta \kappa^2 + \eta \eta_\eta) k_\eta \} (1/Re + \nu_t / \sigma_k)]$$

$$+ J^{-1} \nu_t E_D - J^{-1} \varepsilon \quad (4)$$

$$(J^{-1} \varepsilon)_t + (J^{-1} \varepsilon U)_\xi + (J^{-1} \varepsilon V)_\eta =$$

$$[J^{-1} \{ (\xi \kappa^2 + \xi \eta^2) \varepsilon_\xi + (\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) \varepsilon_\eta \} (1/Re + \nu_t / \sigma_\varepsilon)]$$

$$+ [J^{-1} \{ (\xi \kappa \eta + \xi \eta \eta_\eta) \varepsilon_\xi + (\eta \kappa^2 + \eta \eta_\eta) \varepsilon_\eta \} (1/Re + \nu_t / \sigma_\varepsilon)]$$

$$+ J^{-1} C_1 \nu_t \varepsilon k^{-1} E_D - J^{-1} C_2 \varepsilon^2 k^{-1} \quad (5)$$

ここに、 E_D は次式で示される。

$$E_D = 2 [\{ (J^{-1} \xi \kappa u)_\xi + (J^{-1} \eta \kappa u)_\eta \} J]^2 + 2 [\{ (J^{-1} \xi \eta v)_\xi + (J^{-1} \eta \eta v)_\eta \} J]^2$$

$$[\{ (J^{-1} \xi \eta u + J^{-1} \xi \kappa v)_\xi + (J^{-1} \eta \eta u + J^{-1} \eta \kappa v)_\eta \} J]^2 \quad (6)$$

また、上記のモデル定数は標準的な $k \sim \varepsilon$ 乱流モデルのそれを採用し、

$$C_k = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (7)$$

を用いる。

3. 時間積分

従来の方法ではレイノルズ数が十分高くなると、移流項の変動が激しくなり、求められる流速成分は真の値から次第に外れてしまい、その結果、計算が発散するか真の解から大きく外れることになる。このような事態を避けるために、まず最初に2次精度のAdams-Bashfort法を用い、さらに安定化のために、時間積分過程をFractionalステップ法によって分割し、2ステップ目に陰解法によって u^{n+1} 、 v^{n+1} および $p^{n+1/2}$ を求めた。すなわち1stステップでは、移流項と粘性項の半分を用いて仮流速を求めた。2ndステップでは、粘性項の半分と圧力項を用い、陰的に流速場を求める。圧力場は同時にPoissonを解くことにより求められる。この2ndステップを流速発散量が0になるまで繰り返す。

4. 数値計算

計算格子網は不等間隔の(130, 40)のグリッドとして、 $\delta x=0.1$ 、最小 $\delta y=0.015$ とした(Fig.1)。また、 $Re=200,000$ とした。流入、流出部の水深を単位長さとし、流入壁面、流出壁面では対数分布則の流速条件を与えた。上面および底壁面では鉛直方向の流速成分を0とした。時間間隔は無次元の間隔 $\delta t=0.005$ を用い、サイクル3000回まで計算を進めた。 $T=15.0$ における流速分布図と k の等分布図を以下に示す。



Fig.1 Computational Grid.



Fig.2 Velocity Profile at T=15.0.

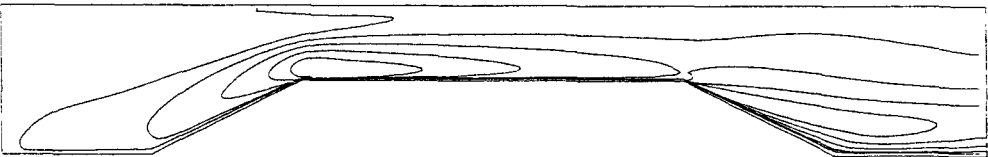


Fig.3 Distribution of k.

5. おわりに

数値計算の結果から、本手法が乱流場での水理現象・局所流の計算には有効ではないかと思われる。しかし、自由表面の取扱についてはこれからの課題である。最後に、プログラム開発にあたっては四日市大学経済学部の武本行正氏のkεGGQ2dを参考にした。また、貴重な助言を頂いた。併せて謝意を表す。